I

האוניברסיטה

מס' מחברת | 2

מס' מזהה

0	6	6	1	6	4	5	5	-	4

לפני הבחינה אנא מלא את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

שם הקורס מבנ"ם אלגבר"ים I

מס' הקורס 80445

שם המורה פרופ' שחר מוזס

תאריך בחינה 12/2/07

<u>הוראות לתלמיד</u>

1. הכן את התעודה המזהה לביקורת.
2. עליך למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
3. כתוב את התשובות בעט בכתב יד ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים.
4. כתוב טיוטה רק על צד אחד של הדף - וסמן "טיוטה". מחק את הטיוטה בצורה ברורה לפני מסירת המחברת. אין לתלוש דפים מהמחברת.

בהצלחה

<u>לשימוש המורה</u>

הציון (0-100) 99

המחברת נבדקה בתאריך

חתימת המורה

שאלות מספר:

1, 4, 5, 6.

25	1
25	4
24	5
25	6

4) תהי G חבורה סופית ויהי $p|n$, ראשוני. אזי, ישנו איבר מסדר p ב-G
(כלומר $e\neq a\in G$, כך ש $a^p=e$, ולכל $t<p$, $a^t\neq e$)

הוכחה:

נגדיר קבוצה: $\Omega=\{(x_0,\dots,x_{p-1}) : \prod_{j=0}^{p-1} x_j = e\}$, כאשר e איבר היחידה ב-G.

מובן כי $\Omega\neq\emptyset$, כי הוקטור $(e,\dots,e)\in\Omega$, כי $e\cdots e=e^p \underset{e\text{ ניטרלי לכפל}}{=} e\cdot e^{p-1}=e^{p-1} \underset{\text{המשך באינדוקציה}}{=} \dots = e$.

נאפיין את כל האיברים ב-Ω.

נשים לב כי ניתן לבחור את $p-1$ האיברים הראשונים ב-p-יה, בחירה כללית ותהליך הבחירה מגדיר את האיבר האחרון, כלומר, לכל בחירה של איברים מ-G, $y_0,\dots,y_{p-2}$, ישנו איבר מתאים ב-Ω, והוא $(y_0\cdots y_{p-2})^{-1}$.

לכן Ω היא אוסף כל הבניות מאיברי G, באורך $p-1$, לכן ניתן להסיק כי $|\Omega|=n^{p-1}$.

נגדיר יחס שקילות על איברי Ω: $x=(x_0,\dots,x_{p-1})$ שקול ל-$y=(y_0,\dots,y_{p-1})$, אם x מתקבל מ-y ע"י סיבוב, כלומר, ישנו $0\le r<p$, כך שלכל $0\le j\le p-1$, $x_j=y_{j+r \pmod p}$. נראה בהמשך כי זה אכן יחס שקילות.

נציין טענה (ונוכיח בהמשך): עבור p ראשוני, אם p-יה נתונה $x=(x_0,x_1,\dots,x_{p-1})$, אם איברי ה-$p$-יה לא כולם שווים זה לזה אזי כל ההזזות הציקליות
$(x_1,x_2,\dots,x_{p-2},x_{p-1},x_0),\dots,(x_{p-1},x_1,x_2,\dots,x_{p-2})$
שונות זו מזו.

נשים לב כי n^{p-1} חלק p, שכן n חלק, לכן ובתוקף.

נתבונן בפירוק Ω למחלקות שקילות. מהטענה נובע כי גודל כל מחלקת שקילות הוא 1 או p. כיוון שסכום גדלי מחלקות השקילות (שהוא גם הגודל של הקבוצה Ω) חייב להתחלק ב-p, וישנה מחלקת שקילות בגודל 1, היא $\{(e,\dots,e)\}$.

נקבל כי ישנן לפחות עוד $p-1$ מחלקות שקילות בגודל 1, כלומר ישנו $e\neq a\in G$ כך ש $a^p=e$.

~~[illegible]~~

נראה כי הסדר של a הוא p, ואז (בהתאם למה שעשינו קודם), סיימנו.

~~[illegible]~~ נניח בשלילה כי ישנו $k<p$ כך ש $a^k=e$, ו-k מינימלי כזה.

$k\neq 0$, כי $a^0=e$ ובחרנו את a כך ש $a\neq e$.

נחלק את p ב-k עם שארית, ונקבל: $p=qk+r$ כאשר $r<k<p$. כעת:

$$e=a^p=a^{qk+r}=a^{qk}\cdot a^r=(a^k)^q\cdot a^r=e\cdot a^r$$

מבחירת a

לכן ישנו $r<k$ כך ש-$a^r=e$, בסתירה למינימליות k.

טענה: לכל p ראשוני, ולחבורה G בגודל p, כל איבר $e\neq z\in G$ יוצר את G, כלומר, $G=\langle z\rangle$.

הוכחה: נבחר $e\neq z\in G$ ונתבונן ב $\langle z\rangle=\{z^n:n\in\mathbb{N}\}$. ראינו כבר כי $\langle z\rangle$ תת-חבורה. ממשפט לגראנז', $|\langle z\rangle|\,\big|\,|G|$. כיוון ש-$|G|=p$, נקבל כי $|\langle z\rangle|\,\big|\,p$. מראשוניות p, $|\langle z\rangle|=1$ או $|\langle z\rangle|=p$, ויש לפחות 2 איברים ב-$\langle z\rangle$, כי $e,z\in\langle z\rangle$, לכן $|\langle z\rangle|=p$. כיוון ש-$\langle z\rangle\subseteq G$ והקבוצות שוות גודל, נסיק כי $G=\langle z\rangle$, כלומר, z יוצר את G, כנדרש.

טענה: אם p ראשוני ו-$x=(x_0,\dots,x_{p-1})$, אזי או שכל ההזזות שוות זו לזו, או שכל הזזה שונה מהאחרות.

$0\neq r$, כי אם $r=0$, ברור ש-$x=y$.

הוכחה: נניח כי $x=(x_0,\dots,x_{p-1})$, $y=(x_r,\dots,x_{p-1},x_0,\dots,x_{r-1})$ ו-$x=y$, כלומר,
לכל j, $x_{j+r\,(\mathrm{mod}\,p)}=x_j$. בפרט, נקבל כי $x_0=x_r=x_{2r}=\dots=x_{tr\,(\mathrm{mod}\,p)}$ (לאו דווקא הכל)

(באינדקסים) הוא $\mathbb{Z}_p$, כלומר, מודולו p. מהטענה הקודמת, כל איבר יוצר את $\mathbb{Z}_p$, בפרט r הנ"ל, כי הנחנו ש-$r\neq 0$. לכן לכל $t\in\mathbb{Z}_p$, ישנו מספר $k\in\mathbb{Z}_p$ כך ש-$t=r\cdot k$, לכן $x_0=x_1=\dots=x_{p-1}$, לכן כל הקואורדינטות (איברי) שווים, כנדרש.

טענה: היחס שהוגדר: $x\sim y$ אמ"מ איברי y מתקבלים מהזזה של איברי x הוא יחס שקילות.

רפלקסיביות: ע"י הזזה באפס $x=(x_0,\dots,x_{p-1})=(x_0,\dots,x_{p-1})=x \Rightarrow x\sim x$.

סימטריה: נניח כי y מתקבל מ-x ע"י הזזה ב-r. אזי x מתקבל מ-y ע"י הזזה ב-$p-r$.

טרנזיטיביות: נניח כי y מתקבל מ-x ע"י הזזה ב-r, z מתקבל מ-y ע"י הזזה ב-s.

אזי, z מתקבל מ-x ע"י הזזה ~~[illegible]~~ ב-$(r+s)$.

5) הראו כי תחום שלמות סופי הוא שדה.

הוכחה: כיוון שתחום שלמות הוא קומוטטיבי (בכפל), וללא מחלקי אפס, די למצוא איבר יחידה (ניטרלי לכפל), ולהוכיח, לכל איבר שונה מאפס, ונקבל כי הקבוצה מקיימת את האקסיומות של שדה.

~~יהא $0\neq a\in R$~~ נניח כי R תחום שלמות סופי.

נראה תחילה קיום איבר יחידה.

יהי $0\neq a\in R$. נגדיר העתקה $\varphi: R\to aR$, ע"י $\varphi(x)=ax$.

φ זו חח"ע, כי אם $ax=ay$, אזי $ax-ay=0$, מדיסטריבוטיביות ב-R, $a(x-y)=0$. כיוון שאין ב-R מחלקי אפס (R תחום שלמות), נקבל כי $a=0$ או $x-y=0$. מהנתון, $a\neq 0$, לכן $0=x-y$. לכן $x=y$, כלומר $\varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow x=y \Rightarrow \varphi$ חח"ע.

φ הנ"ל היא על, כי אם $z\in aR$ אזי z הוא מהצורה ax, עבור $x\in R$ כלשהו, $\varphi(x)=ax=z \Rightarrow \varphi$ על.

כיוון ש-$a\in R$ ו-φ חח"ע ועל, ישנו $u\in R$ כך ש $a=au$. נראה כי u היא איבר ניטרלי לכפל.

נשים לב ש $R=aR$, כי $aR\subseteq R$ (R סגור לכפל משמאל), ~~ושתיהן~~ ושתיהן קבוצות סופיות עם התאמה חח"ע ועל ביניהן.

נניח כי $x\in R$. אזי, כיוון ש $R=aR$, ישנו $b\in R$ כך ש $x=ab$.

ואז:
$$x\cdot u = (ab)u \underset{\text{אסוציאטיביות הכפל ב-}R}{=} a(bu) \underset{\text{אמרנו שזה שלמות לכן הכפל קומוטטיבי}}{=} a(ub) \underset{\text{אסוצ' הכפל}}{=} (au)b \underset{au=a \text{ מבחירת } u}{=} ab \underset{\text{הגדרת } x}{=} x$$

לכן u איבר יחידה.

יהי $0\neq b\in R$. נראה קיום איבר $c\in R$ כך ש $bc=u$ (u איבר יחידה שמצאנו).

נתבונן בהעתקה $\varphi: R\to bR$. מהנ"ל, $R=bR$ (כפי שהראנו (a שבחרנו היה איבר שרירותי)).

נשים לב כי $u\in R$. לכן, $u\in bR$, כלומר, ישנו $c\in R$ כך ש $u=bc$.

לכן b הפיך. לכן נקבל כי R הינו שדה, כנדרש.

24/25

$A, B \trianglelefteq G$

$\forall a\in A,\ b\in B \quad , ab = ba$

נוכיח $aba^{-1} \in B$, כי B נורמלית, לכן יש $b' \in B$

$ab = b'a \quad \Leftarrow \quad aba^{-1} = b'$ e p

$\cancel{bab^{-1}}$ $bab^{-1} \in A$ כי A נורמלית, לכן יש $a' \in A$

$\left\{\begin{matrix} ba = a'b \\ ab = b'a \end{matrix}\right\} \quad \Leftarrow \quad bab^{-1} = a'$ e p

$ba = a'b \Rightarrow b = a'ba^{-1}$
$ab = b'a$

$\cancel{ba = b}$

$\cancel{\Rightarrow ab = a(a^{-1}ba^{-1})b = aa^{-1}ba^{-1}b}$

$\cancel{b' = a}$

$hg_0 = g \Rightarrow h = \cancel{g_0^{-1}g}\ \ g g_0^{-1}$

$$|O(x)| = \frac{|G|}{|Stab_G x|}$$

$\cancel{\varphi: O(x)}$

$$\varphi\left(G/_{Stab_G(x)}\right) \longrightarrow O(x)$$

$$\varphi(gH) = gx.$$

$g_1x = g_2x \overset{?}{\Leftrightarrow} g_1H = g_2H \Rightarrow g_1 \in g_2H = g_2^{-1}g_1 \in H \Rightarrow \cancel{(g_1g_2^{-1})x = x}$

$(g_2^{-1}g_1)(x) = x \Rightarrow g_1x = g_2x$

1) א- הראו כי לחבורה מסדר $\underbrace{p}_{\text{p ראשוני}}^{n}$ יש מרכז לא טריוויאלי.

<u>הוכחה:</u> נתבונן בפעולת G על G, ע"י הצמדה, כלומר, הפעולה של איבר $g\in G$ על $x\in G$ היא $x\to gxg^{-1}$.

ניתן לפרק את G פירוק זר למסלולים, כיוון שלכל $x,y\in G$, $O(x)\cap O(y)\neq\emptyset \Rightarrow O(x)=O(y)$. (נוכיח זאת בהמשך). ~~הגודל של~~ $t \mid |G|$, מתקיים $t \mid p^n$, כלומר בהכרח $t=p^r$ או $t=1$

מיד נראה שעבור כי גודל כל מסלול מחלק את גודל החבורה, לכן נקבל כי גודל כל מסלול הוא 1 או חזקה של p (כלומר p^k). כיוון שיש מסלול בגודל 1 - $\{e\}$ (כי לכל $g\in G$, $g\cdot e\cdot g^{-1}=e$), נקבל שישנם לפחות עוד $p-1$ מסלולים בגודל 1, כלומר ישנם עוד $p-1$ איברים המקיימים $gxg^{-1}=x$, כלומר $xg=gx$. (לכל g).

זה בדיוק אומר של איבר כזה נמצא במרכז של G, כי

$$Z(G)=\{x\in G:\forall g\in G,\ gx=xg\}$$

לכן ישנם עוד איברים ב-$Z(G)$ שאינם e, לכן $Z(G)$ לא טריוויאלי.

נוכיח את שתי הטענות: (עבור חבורה G הפועלת על קבוצה X)

* אם $O(x)\cap O(y)\neq\emptyset$, אז $O(x)=O(y)$.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $z\in O(x)\cap O(y)$.

היות ו-$z\in O(x)$, אזי יש g_0 ב-G כך ש $z=g_0x$ (כדי לסמן לכך שזה g הפועל על x).

$$O(z)=\{gz:g\in G\}\underset{\uparrow}{=}\{(hg_0)z:h\in G\}\underset{\uparrow}{=}\{h(g_0z):h\in G\}=\{h(x):h\in G\}$$

כי לכל g קיים יחיד: $h=gg_0^{-1}$ בגלל החוג. מהגדרת הפעולה

$$=\{hx:h\in G\}=O(x).$$

באופן דומה, כי $O(z)=O(y)$, לכן $O(x)=O(y)$.

$|Z(G)| = p$. $G/Z(G)$ – מכורה בגודל p. $Z(G) = \{1, 2, \ldots, p-1\}$

$G/Z(G) = \{x \cdot Z(G) : x \in G\}$

$= \{Z(G), x_1 \cdot Z(G), \ldots, x_{p-1} \cdot Z(G)\}$

$= \{Z(G), \{x_1, x_1 \cdot 1, \ldots, x_1(p-1)\}, \ldots, \{x_{p-1}, \ldots, x_p(p-1)\}\}$.

מהנחה, השלילה, נניח ש $x, y \in G/Z(G)$ $e \neq p$, $xy \neq yx$:

$\Rightarrow y^{-1}xy \neq x \Rightarrow x^{-1}y^{-1}xy \neq e$

$\varphi : Z(G) \times G/Z(G) \to G$

$G/Z(G)$ … $\Rightarrow$ … $\varphi(y, xZ(G)) = yx$

$|G| = (Z(G), G/Z(G))$

$\varphi(a^i, x^j Z) = \varphi(a^k, x^l H) = a^k x^l$

$a^i x^j$

$\Leftarrow$

$x^{j-l} = a^{k-i}$ אזי $x^{j-l} \in Z$ אזי $j = l$! $i = k$.

$\varphi((a^{i_1} x^{j_1} Z) \cdot (a^{i_2}, x^{j_2} Z)) = (a^{i_1} \cdot x^{j_1}) a^{i_2} \cdot x^{j_2} = a^{i_1 + i_2} \cdot x^{j_1 + j_2}$

* גודל של מסלול מחלק את גודל החבורה.

הוכחה: יהי $x \in X$, נראה כי $Stab_G(x)=\{g\in G : gx=x\}$ תת-חבורה של G: $Stab_G(x)\neq\emptyset$, כי $ex \overset{def}{=} x$.

אם $g_1,g_2 \in Stab_G(x)$ אזי $(g_1g_2)x \underset{\text{הגדרת הפעולה}}{=} g_1(g_2x) \underset{g_2 \text{ איבר במייצב של } x}{=} g_1x \underset{g_1 \text{ איבר במייצב של } x}{=} x$

לכן סגירות לכפל.

ולכן אם $g\in Stab_G(x)$, אזי $x=gx$

~~$=g(g^{-1}x)=gx$~~

נפעיל על שני אגפי השוויון את g^{-1}, ונקבל: $g^{-1}x=g^{-1}(gx)\underset{\text{הגדרת הפעולה}}{=}(g^{-1}g)x=ex=x$

לכן סגירות להופכי, לכן המייצב של x ב-G הוא תת-חבורה. (ונסמן: $H=Stab_G(x)$)

נגדיר העתקה בין מחלקות של $Stab_G(x)$ ובין המסלול של x, $\varphi: G/Stab_G(x) \to O(x)$, ע"י $\varphi(gH)=gx$

φ מוגדרת היטב, כי אם $g_1H=g_2H$, בפרט $g_1\in g_2H$ (כי $e\in H$ כי H תת-חבורה)

ולכן $g_2^{-1}g_1\in H$, כלומר $g_2^{-1}g_1$ איבר במייצב.

$$\Rightarrow g_2^{-1}g_1x = x \Rightarrow g_1x=g_2x$$

לכן φ הנ"ל מוגדרת היטב.

φ חח"ע, כי אם $g_1x=g_2x$, אזי $g_2^{-1}g_1$ איבר במייצב (במשוואה דומה), לכן $g_1H=g_2H$.

φ על, כי אם $z\in O(x)$, אזי $z=gx$ ומתקיים $\varphi(gH)=gx=z$

לכן יש העתקה חח"ע ועל בין G/H ובין $O(x)$. כיוון ש-G סופית $|G/H|=\frac{|G|}{|H|}$, לכן גודל המסלול מחלק את גודל החבורה. ולכן סיימנו את מסקנת העזר והוכחנו כי ל-P יש מרכז לא טריוויאלי

$A \cap B = \{e\}$ ~~$A\triangleleft B$~~, B $B, A \triangleleft G$.

$\overbrace{a \cdots a}^{t} \overbrace{b \cdots}^{s} b \overbrace{a \cdots a}^{t_1} \overbrace{b \cdots b}^{s_1}$

$aba^{-1} \in B$

$aba^{-1} = b_1$

$bab^{-1} = a_1$

$x \in G \setminus Z(G)$ יהי .

ונניח כי

$ab \neq ba \Rightarrow b \neq aba^{-1} \Rightarrow \exists b_1 \neq b$ s.t. $b_1 = aba^{-1}(b^{-1}b) = a(ba^{-1}b^{-1})b$

$g_2 g_1 = h_2 q_2 h_1 q_1 = h_2 h_1 q_2 q_1 = h_2 h_1 q_2 q_1$

$= a\hat{a}b \Rightarrow b_1 = a\hat{a}b$

$\rightarrow b_1 b^{-1} = a\hat{a} = ,\ b_1 b^{-1}, a\hat{a} \in A \cap B$

~~$h_1 h_2 q_1 q_2 = h_1 q_1$~~

$h_1 h_2 q_1 q_2 = h_1 q_1 h_2 q_2 = g_1 h_1$

~~$ab = ab(a^{-1}a) = aba^{-1}a = b_1 a$~~

$(ak)ak = a^2 k^2$

$aba^{-1} = b_1 \in B$, $bab^{-1} = a_1 \in A$ $\Rightarrow$ ~~$aba^{-1}b_1^{-1} = e$~~ $\Rightarrow ab = b_1 a$ $(a^{-1}k)$

$$B \ni b_1 = aba^{-1} = aba^{-1}(b^{-1}b) = a(ba^{-1}b^{-1})b = a\hat{a}b$$

$$\Rightarrow b_1 b^{-1} = a\hat{a} \Rightarrow a\hat{a} = e \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Rightarrow aba^{-1}b \Rightarrow ab = ba.$$

$G/Z(G)$

$n_q(G) \equiv 1 \mod q \Rightarrow 1, 19, 19, 28, 37, 46$

$n_q(G) \mid |G| \Rightarrow n_q(G) = 1$

$\Rightarrow n_q(G)$ אז תת חבורה יחידה מסדר q

אבל

$G/Z(G)$

~~$(h_1 q_1)$~~

$(h, q) = (h_1, q_1)(h, q)(h_1^{-1}, q_1^{-1})$. $g q g^{-1} \overset{?}{\in} Q$

$G/Z(G)$. $\tilde{h} = hq\ \ \hat{h} q^{-1} h^{-1}$

$Z(G)$ ונניח כי $a \notin$

יהי $x \in G$

$= a^{t+t_1} \cdot b^{s+s_1} = x \cdot y = a^{t}b^{s} \cdot a^{t_1} b^{s_1}$ ונכל . $b \notin Z(G)$ כאשר, $x = a^{t} b^{s}$ אז

$t \in Z(G)$ כאשר, $x = a^{i} \cdot t$ ~~$a^{-i}x$~~ = לכן כלשהו, $x \in G$ יהי

$l \notin Z(G)$ $y = a^{k} \cdot l$

$xy = a^{i}t \cdot a^{k}l = a^{k}t \cdot a^{i}l = ta^{k}la^{i} =$

מהגדרה. היא כזו. $G \setminus Z(G)$ ויש $a \notin$ מהגדרה. ונניח כי

ד- הראו כי חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $|G|=p^2$. לכל חבורה G, $Z(G)$ תת-חבורה אבלית ובפרט נורמלית, כי לכל $g\in G$, $gAg^{-1}=A$ (כאשר A אבלית)

לא בהכרח מספיק!

לכן מוגדרת $G/Z(G)$. כתת-חבורה של G

מסעיף א' בסעיף β, $Z(G)\neq\{e\}$, כי G מסדר חזקת ראשוני.

אם G אבלית כולה - סיימנו. $Z(G)$ בשלילה, ~~[illegible]~~ תת-חבורה ממש של G.

ממשפט לגרנז', $|Z(G)|\,\big|\,|G|$. הנחה: $|G|=p^2$; מתקיים כי $|Z(G)|=1,p,p^2$.

מהנחת השלילה, $G\neq Z(G)$, ולכן $|Z(G)|\neq p^2$, ולכן $|Z(G)|=p$.

~~[illegible]~~

לכן נסיק כי $G/Z(G)$ תת חבורה מסדר p. היא לכן ת"ח מסדר ראשוני.

היא נוצרת ע"י $x\cdot Z(G)$, כלומר: $G/Z(G)=\{x^i\cdot Z(G):0\le i\le p-1\}$, עבור $x\notin Z(G)$.

~~[illegible]~~ היא; $Z(G)$ ציקלית, מסדר ראשוני, היא נוצרת ע"י איבר y.

יהי $g\in G$. נראה כי $g=x^iy^j$. נתבונן בהומומ' המנה, $\varphi: G\to G/Z(G)$.

לא מוגדר (לא ידוע)

$\varphi(g)=x^iZ(G)$. לכן הגדרנו את x^i המתאים עבור g. [illegible] y עבור g

$g=x^iy^j$, נכפול את g משמאל ב x^{-i}, ונקבל $\varphi(x^{-i}g)=x^{-i}Z(G)\cdot x^iZ(G)=Z(G)$

וזה אומר שאיבר ב $Z(G)$. (כלומר, $x^{-i}g\in Z(G)$), לכן הגדרנו y^j לכל $g\in G$

$g=x^iy^j$. כעת, $g_1\cdot g_2 = x^{i_1}y^{j_1}\cdot x^{i_2}y^{j_2} = x^{i_1+i_2}\cdot y^{j_1+j_2} = x^{i_2}\cdot x^{i_1}\cdot y^{j_2}\cdot y^{j_1}$

y במרכז G

$x^{i_2}y^{j_2}\cdot x^{i_1}\cdot y^{j_1} = g_2\cdot g_1$

לכן כל שני איברים ב G מקיימים חילופיות בכפל, לכן $G=Z(G)$, סתירה.

כיוון ש $\varphi(x^{-i}g)=Z(G)$

האוניברסיטה

מס' מחברת 2

מס' מזהה

0	6	6	1	6	4	5	8	—	9

לפני הבחינה אנא מלא את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

שם הקורס מבנים אלגבריים

מס' הקורס 80445

שם המורה פרופ' שחר מוזס

תאריך בחינה 12/2/07

הוראות לתלמיד

1. הכן את התעודה המזהה לביקורת.
2. עליך למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
3. כתוב את התשובות בעט בכתב יד ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים.
4. כתוב טיוטה רק על צד אחד של הדף - וסמן "טיוטה". מחק את הטיוטה בצורה ברורה לפני מסירת המחברת. אין לתלוש דפים מהמחברת.

בהצלחה

לשימוש המורה

הציון (0-100)

המחברת נבדקה בתאריך

חתימת המורה

א- תהי G חבורה, ותהיינה $A,B \lhd G$, המקיימות $A\cap B=\{e\}$.
הוכח כי לכל $a\in A$, $b\in B$, מתקיים: $ab=ba$.

<u>הוכחה:</u> נניח כי a ו b כנ"ל.

$B\lhd G$, לכן לכל $g\in G$, ולכל $\tilde b\in B$, $g\tilde b g^{-1}\in B$. בפרט עבור $g=a$, $\tilde b=b$, נקבל
כי $aba^{-1}\in B$. לכן ישנו $b_1\in B$, כך ש $aba^{-1}=b_1$.

$$b_1 = aba^{-1} \underset{\text{איבר יחידה}}{=} aba^{-1}eb \underset{e=b^{-1}b}{=} aba^{-1}\cdot(b^{-1}\cdot b) \underset{\text{אסוצ' הכפל}}{=} (aba^{-1}b^{-1})b$$

$$\overset{\text{אסוצ' הכפל}}{=} a(ba^{-1}b^{-1})b$$

וגם $A\lhd G$, לכל $g\in G$, ולכל $\tilde a\in A$, $g\tilde a g^{-1}\in A$. בפרט עבור $g=b$, $\tilde a=a^{-1}$
נקבל כי $ba^{-1}b^{-1}=a_1$, עבור $a_1\in A$. לכן:

$$b_1 = a(ba^{-1}b^{-1})b = a\cdot\hat a\, b.$$

לכן $b_1\cdot b^{-1} = a\cdot\hat a$. בצד ימין נקבל איבר מ A ובצד ימין גם איבר ב B,
לכן זהו איבר בחיתוך $A\cap B$. לכן $a\hat a=e$, כלומר:

$$e = a\hat a = aba^{-1}b^{-1} \underset{\text{כפל מימין ב-}b}{\Rightarrow} b = aba^{-1} \underset{\text{כפל מימין ב-}a}{\Rightarrow} ba=ab$$

כנדרש.

ב. הוכח כי חבורה מסדר 45 היא אבלית.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $|G|=45$. $3^2|45$ ו $5|45$.

אז-כן יש ל G תת-חבורות מסדר 9 ומסדר 5. (ממשפט סילו הראשון).

נסמנן Q,H, כך ש $|H|=9$, $|Q|=5$.

נשים לב ש H חבורה נורמלית, כי ממשפט שני של סילו, $n_p(G) \equiv 1 \mod p$
(כאשר $n_p(G)$ הוא מספר החבורות סילו של G מסדר p^α, כך ש $|G|=p^\alpha m$)

אז-כן האפשרויות היחידות שיכולות להיות $n_p(G)$ הן: $1, 10, 19, 28, 37$.

כמו-כן, מהמסקנה ממשפטי סילו (הראשון והשני), n_p מחלק את $|G|$...

אז-כן נקבל כי $n_q(G)=1$. ממשפט קודם (אם יש לחבורה p-סילו יחידה H,
אזי H נורמלית ב G), נקבל כי H נורמלית (המשפט נובע מתוך משפט שני
של סילו). כמו-כן, כיוון ש H מסדר ~~ריבוע~~ ריבוע ראשוני,
נסיק כי H אבלית. נראה כי $G=HQ$, ולכן נסיק כי H אבלית.

תחילה, $H\cap Q=\{e\}$ שכן, אם $z\in H\cap Q$, אזי $o(z)\,|\,|H|$ וגם $o(z)\,|\,|Q|$

לכן הסדר של z מחלק את 9 ואת 5, לכן $o(z)=1$, כלומר, $e=z$.

ראינו בעבר כי אם זוג תתי-חבורות $A,B\le G$, מתקיים:

$$|AB|=\frac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}.$$

לכן נסיק כי $|HQ|=|H|\cdot|Q|$ (כי $H\cap Q=\{e\}$), ולכן $|HQ|=45$.

כיוון ש-$HQ\subseteq G$ (G סגורה לכפל, לכן $hq\in G$ אם $h,q\in Q\ni H$, לכן $HQ\subseteq G$)

ובגלל הקבוצות שוות בגודל, נקבל כי $G=HQ$,

לכן G איבר ב-G הוא מהצורה $g=hq$

G איזומורפית ל-$H\times Q$, כי $\varphi:G\to H\times Q$, $\varphi(hq)=(h,q)$

ההעתקה חח"ע ועל: $(h_1,q_1)=(h_2,q_2) \underset{\text{חח"ע}}{\Leftrightarrow} h_1=h_2,\ q_1,q_2$, ועל: $\varphi(h,q)=(h,q)$

φ הומו': $\varphi((h_1,q_1)(h_2,q_2))=(h_1h_2,q_1q_2)=(h_1,q_1)(h_2,q_2)\Rightarrow$.

די להראות כי $(H,1)$ (איזומורפי ל-H ב-G) נורמלית ב-$H\times Q$, ואכן

$$\underset{(H,1)}{(h_1hh_1^{-1},1)}=(h_1hh_1^{-1},q_1q_1^{-1})=(h_1,q_1)\cdot(h,1)\cdot(h_1^{-1},q_1^{-1})$$

לכן $H\lhd G$.

כיוון ש-$H\cap Q=\{e\}$ ו-$H,Q\lhd G$, נסיק כי לכל $h\in H$, $q\in Q$, $hq=qh$,

אכן, נראה ש-G אבלית, כי אם $g_1,g_2\in G$, אזי $g_1=h_1q_1$, $g_2=h_2q_2$. ולכן:

$|G| = p^2$

$|Z(G)| = p$, $\left|G/Z(G)\right| = p$

$\{x^i \cdot Z(G)\}$

נראה כי כל איבר ניתן להצגה כ $a^i x^j$ וסימון

יהא $g \in G$, אם $g \in Z(G)$ סיימנו. אחרת, נתבונן ב $gZ(G)$

$g \notin Z(G)$, אז, $x^i Z(G) = gZ(G)$ עבור ~~עבור~~ $(0<i)$

לכן, נסתכל ב $x^{-i} \cdot g$

$\varphi(x^{-i} g) = x^{-i} Z(G) \cdot g Z(G) = Z(G)$

$$g_1 g_2 = h_1 q_1 h_2 q_2 = h_1 h_2 q_1 q_2 = h_2 h_1 q_2 q_1$$

$$= h_2 q_2 h_1 q_1 = g_2 g_1 \Rightarrow \text{ابيلي } G$$