

האוניברסיטה העברית בירושלים  
החוג למתמטיקה

מבחן במבוא לטופולוגיה (80516)

מועד ב' תשס"ז 3/9/07

המורה: פרופ' עמנואל פרג'ון

הזמן: שעתיים

משקל כל שאלה שווה 25 נקודות

א) יש לענות על אחת משתי השאלות הבאות:

- (1) תהי  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה בין מ"ט האוסדורף קומפקטיים. הראי כי אם הגרף של  $f$  -  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subseteq X \times Y$  סגור במרחב המכפלה אז  $f$  רציפה כאשר  $X$  ו- $Y$  טופולוגיים.  
(2)  $\checkmark$  הוכיח\י שאם לטופולוגיה על  $X$  יש בסיס בן מניה אז לכל  $A \subseteq X$  ולכל כיסוי פתוח של  $A$  יש תת כיסוי בן מניה.

ב) יש לנסח ולהוכיח את אחד מהמשפטים הבאים:

- (3)  $\checkmark$  נסח\י והוכיח\י את משפט טיכונוף.  
(4) נסח\י והוכיח\י את משפט המטריזציה של מרחבים נורמליים עם בסיס בן מניה.

ג) יש לענות על שתיים מבין השאלות הבאות:

- (5) הגדיר\י מהו סגור של קבוצה בתוך מרחב טופולוגי. יהי  $A \rightarrow \bar{A}$  אופרטור הסגור על קבוצות כלשהן במ"ט. הראי א) לכל קבוצה  $A \subseteq X$  מתקיים  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$  ב) לכל פתוחה  $A \subseteq X$  מתקיים:  $\text{int}(\bar{A}) = \bar{A}$ .  
(6) יהי  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ . הוכיח\י כי  $X$  פשוט קשר.  
(7) תהי  $(Y_i, d_i)$  סדרת מ"מ קומפקטיים. יהי  $Y = \prod_{i \in \mathbb{N}} Y_i$  מכפלת הקבוצות. מצא\י מטריקה על  $Y$  כך שהטופולוגיה המתקבלת הינה טופולוגית המכפלה. הוכיח\י את טענותיך.  
(8)  $\checkmark$  הראי כי מרחב  $X$  הוא האוסדורף אם הקבוצה  $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$  סגורה כדת מרחב של המרחב  $X \times X$ .

בהצלחה!