תורת המידה
משפטים והגדרות

9/4/32008

הגדרת המידה

הגדרה 1 (**σ-אלגברה**) σ-אלגברה על קבוצה X היא אוסף m של תתי קבוצות של X המקיימת את התכונות הבאות:

- $X \in m$
- $A \in m \Rightarrow A^c \in m$
- $\forall n : A_n \in m \Rightarrow \bigcup_n A_n \in m$

הגדרה 2 (**מרחב מדיד**) מרחב מדיד הוא זוג (X, m) כאשר m היא σ-אלגברה על X

הגדרה 3 (**פונקציה מדידה**) (X, m) מרחב מדיד, Y מרחב טופולוגי ו $f : X \to Y$ תקרא פונקציה מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $V \subset Y$ מתקיים $f^{-1}(V) \in m$

משפט 1 אם u, v פונקציות מדידות ממשיות על X ו $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ פונקציה רציפה לתוך מרחב טופולוגי Y אז הפונקציה $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ היא מדידה

הוכחה - נסמן: $g(x) = (u(x), v(x))$ רוצים להראות ש $\Phi \circ g$ מדידה, ברור שדי להראות ש g מדידה (כי Φ רציפה). כל פתוחה ב $\mathbb{R}^2$ היא איחוד בן בניה של מלבנים פתוחים, לכן די להסתכל על מקור של מלבן פתוח $I_1 \times I_2$.

$$g^{-1}(I_1 \times I_2) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$$

חיתוך של מדידות ולכן מדיד $\square$

מסקנה 1 (**כמעט כל מה שעושים עם מדידות יוצא מדיד**) אם $f = u + iv$ כאשר u, v ממשיות:

- אם u, v מדידות אז $f = u + iv$ מרוכבת מדידה
- אם f מרוכבת מדידה אז גם $u, v, |f|$ ממשיות מדידות
- f, g מרוכבות מדידות אז גם $f + g, fg$ מדידות
- אם $E \in m$ אז χ_E מדידה
- אם f מדידה אז יש α מדידה כך ש $|\alpha| = 1$ ו $f = \alpha|f|$

הוכחה -
- מהמשפט - כי $(x, y) \mapsto x + iy$ רציפה
- כי $Re(z), Im(z), |z|$ רציפות ולכן $u, v, |f|$ הרכבה של רציפה עם מדידה
- עבור ממשיות זה מיידי - $(x, y) \mapsto x + y$ ו $(x, y) \mapsto xy$ רציפות. עבור מרוכבות צריך לכתוב אותן כ $u + iv$ ולהראות שהחלק המדומה והממשי בנפרד רציפים
- ברור - המקור של כל קבוצה היא אחד מ X, Φ, E, E^c
- נסמן ב $E = f^{-1}(0)$ אז E מדידה ולכן גם χ_E מדידה ולכן גם $f + \chi_E$ מדידה. בנוסף $\Phi = \frac{z}{|z|}$ רציפה כ $\Phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ולכן $\alpha = \Phi \circ (f + \chi_E)$ מדידה וקל לבדוק שמקיימת את התכונות הנדרשות

$\square$

משפט 2 (ה σ-אלגברה הנוצרת) בהנתן אוסף F של תתי קבוצות של X אז יש σ-אלגברה מינימלית יחידה המכילה אותן.

הוכחה - קל לבדוק שחיתוך של σ-אלגבראות הוא σ-אלגברה. אז ניקח את חיתוך כל אלו שמכילות את F ומשם כבר ברור. $\square$

הגדרה 4 (קבוצות בורל) קבוצות בורל הן איברי ה σ-אלגברה הנוצרת מהטופולוגיה של מרחב טופולוגי X

הגדרה 5 (G_δ, F_σ) קבוצה נקראת G_δ אם היא חיתוך בן מניה של פתוחות F_σ אם היא איחוד בן מניה של סגורות ואפשר גם להמשיך - $G_{\delta}\sigma$ היא איחוד בן מניה של קבוצות G_δ וכו'

הגדרה 6 (פונקציה מדידה-בורל) $f : X \to Y$ בין זוג מרחבים טופולוגיים תקרא מדידה-בורל אם היא מדידה ביחס ל σ-אלגברת בורל על X

משפט 3 אם (X, m) מרחב מדיד ו Y מרחב טופולוגי ו $f : X \to Y$ אז:

- $\Omega = \left\{E \subset Y; f^{-1}(E) \in m\right\}$ היא σ-אלגברה ב Y
- אם f מדידה ו $E \subset Y$ קבוצת בורל אז $f^{-1}(E)$ מדידה
- עבור $Y = [-\infty, \infty]$ אם $f^{-1}((a, \infty]) \in m$ לכל $a \in \mathbb{R}$ אז f מדידה
- אם f מדידה ואם Z מ"ט ו $g : Y \to Z$ מדידה בורל אז $g \circ f : X \to Z$ מדידה

הוכחה -
- די ברור כי $f^{-1}(\bigcup A_n) = \bigcup f^{-1}(A_n)$ וכן $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
- אם f מדידה אז Ω מכילה את כל הפתוחות, ולכן גם את כל קבוצות בורל
- כל פתוחה היא איחוד בן מניה של קבוצות מהסוג $(a, \infty], [-\infty, a), (a, b)$ וקל להראות שהמקור של קבוצות כאלו פתוח.
- ברור

הגדרה 7 (גבול של סדרות פונקציות) אם $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ אז נגדיר פונקציות גבול:

- $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n(f_n(x))$
- $(\inf_n f_n)(x) = \inf_n(f_n(x))$
- $(\limsup_n f_n)(x) = \limsup_n(f_n(x))$
- $(\liminf_n f_n)(x) = \liminf_n(f_n(x))$

משפט 4 אם לכל n $f_n : X \to [0, \infty]$ מדידה, אז גם $\sup f_n$ וגם $\limsup f_n$ מדידות. (ומכאן נובע שגם $\inf f_n$, $\liminf f_n$ הן מדידות.)

הוכחה - מהמשפט הקודם די להראות שהמקור של של $(a, \infty]$ מדיד. אבל

$$(\sup_n f_n)^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_n f_n^{-1}((a, \infty])$$

איחוד בן מניה של מדידות ולכן מדיד. אז $\sup_n f_n$ מדידה ולכן גם $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$ מדידה ולכן גם לכל n $\sup_{k\geq n} f_n$ מדידה ולכן גם $\limsup_n f_n = \inf_n(\sup_{k\geq n} f_n)$ מדידה ולכן גם $\liminf = -\limsup(-f_n)$ $\square$

מסקנה 2 אם מדידות מתכנסות נקודתית - אז פונקצית הגבול מדידה ($\limsup = \liminf = \lim$)

הגדרה 8 אם $f : X \to [-\infty, \infty]$ אז אפשר לכתוב $f = f^+ - f^-$ כאשר:

- $f^+ = max(f, 0)$ - החלק החיובי
- $f^- = -min(f, 0)$ - החלק השלילי

ובסימונים אלו מתקיים $|f| = f^+ + f^-$

מסקנה 3 $max(f, g) = sup(f, g)$ מדידה עבור f, g מדידות ולכן גם f^+, f^- מדידות

טענה 1 אם $f = g - h$ עבור $g, h \geq 0$ אז $f^+ \leq g, f^- \leq h$

הוכחה - $0 \leq g \leq f \Rightarrow g \leq max(f, 0)$ ובדומה עבור h

הגדרה 9 (פונקציה פשוטה) פונקציה מרוכבת s על מרחב מדיד תקרא פשוטה אם היא מקבלת מספר סופי של ערכים

הערה 1 אם s פשוטה ומקבלת ערכים $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ אז אפשר להגדיר $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$ ולרשום

$$s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$$

ולכן s מדידה אמ"ם A_i מדידות כולן.

משפט 5 לכל $f : X \to [0, \infty]$ מדידה יש סדרה s_n של פונקציות פשוטות שמתכנסות אליה מונוטונית

הוכחה - ראשית נראה עבור פונקצית הזהות $x \mapsto x$ על $\mathbb{R}$; נגדיר $k_n(t)$ להיות הטבעי k עבורו $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ ונגדיר

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)2^{-n} & t < n \\ n & t \geq n \end{cases}$$

נשים לב שבקטע $[0, n]$ מתקיים $t - 2^{-n} \leq \varphi_n(t) \leq t$ ולכן φ_n מתכנסות לזהות. ברור ש φ_n פשוטה לכל n (היא מקבלת בדיוק $n2^n$ ערכים) והיא מדידה כי המקור של כל ערך הוא קטע. קל לבדוק שההתכנסות היא מונוטונית כי לכל t מתקיים ש $k_{n+1}(t) \in \{2k_n(t), 2k_n(t) + 1\}$ ומשם ברור. כעת, עבור $f : X \to \mathbb{R}$ נגדיר $s_n = \varphi_n \circ f$ והן תתכנסנה ל $Id \circ f = f$

הגדרה 10 (מידה חיובית) מידה חיובית על σ-אלגברה m היא פונקציה $\mu : m \to [0, \infty]$ שהיא σ-אדיטיבית, כלומר לכל אוסף של קבוצות זרות בזוגות $\{A_n\}$ מתקיים ש $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ובנוסף - קיימת קבוצה עם מידה סופית.

הגדרה 11 (מרחב מידה) מרחב מידה הוא מרחב מדיד X עם σ-אלגברה m ומידה חיובית μ עליה

משפט 6 (תכונות של מידה חיובית) אם (X, m, μ) מרחב מידה אז

- $\mu(\Phi) = 0$
- מונוטוניות - $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- אם $A_1 \subseteq A_2 \ldots$ ו $A = \bigcup A_n$ אז $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$
- אם $A_1 \supseteq A_2 \ldots$ ו $A = \bigcap A_n$ ובנוסף $\mu(A_1) < \infty$ אז $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$

הוכחה -
- ניקח A עם מידה סופית ונרשום $A = A \cup \Phi$ ונקבל $\mu(A) = \mu(A) + \mu(\Phi)$ ולכן $(\mu(A) < \infty)$ נקבל $\mu(\Phi) = 0$
- ברור כי $B = A \cup (B - A)$
- נגדיר $B_n = A_n - A_{n-1}$ ונקבל קבוצות זרות בזוגות ו $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_n)$ כמובן שהגבול קיים במובן הרחב כי זה טור של מספרים חיוביים ומ σ-אדיטיביות $\lim(\mu(A_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(\bigcup B_n) = \mu(A)$
- נגדיר $B_n = A_1 - A_n$ - זו סדרה מונוטונית עולה ולכן $\lim(\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \lim \mu(B_n) = \mu(A_1 - \bigcap A_n) = \mu(A_1) - \mu(A)$ ומתקיים ש $\mu(A_1) < \infty$ ולכן ניתן לחסר משני האגפים.

□

הגדרה 12 (אינטגרל לבג של פונקציה פשוטה) אם $s : X \to [0, \infty), s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ פונקציה פשוטה מדידה ו μ מידה חיובית, אז לכל E מדידה נגדיר

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

הגדרה 13 (אינטגרל לבג) עבור פונקציה מדידה $f : X \to [0, \infty]$ נסמן ב A את כל הפונקציות הפשוטות הקטנות מ f ונגדיר:

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \in A} \int_E s d\mu$$

משפט 7 (**פונקציה פשוטה מגדירה מידה**) אם $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ פונקציה פשוטה מדידה אי שלילית אז $\varphi(E) = \int_E s d\mu$ היא מידה חיובית.

הוכחה - ברור $\varphi(\emptyset) = 0$, נראה σ-אדיטיביות. ניקח $\{E_n\}$ זרות בזוגות, אז נסמן $E = \bigcup E_n$:

$$\varphi(E) = \sum_i \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \sum_i \alpha_i \sum_k \mu(E_k \cap A_i) =$$

$$= \sum_k \sum_i \alpha_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_k \int_{E_k} s d\mu = \sum_k \varphi(E_k)$$

מותר היה להחליף את סדר הסכימה כי מדובר בסכומים של מספרים חיוביים. $\square$

משפט 8 אם s, t פשוטות מדידות אי שליליות אז $\int_E (s+t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$

הוכחה - נסמן $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $t = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$, $E_{ij} = A_i \cap B_j$. נשים לב ש:

$$\int_{E_{ij}} (s+t) d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s d\mu + \int_{E_{ij}} t d\mu$$

וכעת

$$\int_X (s+t) d\mu = \varphi(X) = \sum_{i,j} \varphi(E_{ij}) = \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} (s+t) d\mu =$$

$$= \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} s d\mu + \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} t d\mu = \sum_{i,j} \varphi_s(E_{ij}) + \sum_{i,j} \varphi_t(E_{ij}) =$$

$$= \varphi_s(X) + \varphi_t(X) = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$\square$

משפט 9 (**משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג**) אם $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \ldots \leq \infty$ סדרת פונקציות מדידות אי-שליליות המתכנסות נקודתית לפונקציה f אז $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$

הוכחה - f מדידה כגבול של מדידות. הסדרה $\int f_n d\mu$ היא סדרה מונוטונית חיוביות ולכן מתכנס במובן הרחב ל $\alpha \in [0, \infty]$. מצד אחד - $f_n \leq f$ לכל n ולכן $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ ולכן גם בגבול $\alpha \leq \int f d\mu$ מצד שני - ניקח כל פונקציה פשוטה $s \leq f$ מדידה, ונקח $c \in [0, 1)$ ונגדיר :

$$E_n = \{x; f_n(x) \geq cs(x)\}$$

אז ברור ש E_n מדידות ומוכלות זו בזו. ולכל x, אם $f(x) = 0$ אז גם $cs(x) = 0$ ואז $x \in E_1$ ואחרת יש n מספיק גדול כך ש $f_n(x) > cs(x)$ כי $f_n(x)$ מספיק קרוב ל $f(x)$ ו $cs(x) < f(x)$ (כי $c < 1$). ולכן $\bigcup E_n = X$, ועכשיו:

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs(x) d\mu$$

כאשר $cs(x)$ פשוטה ולכן אינטגרל עליה מגדיר מידה - $d\phi = csd\mu$, ובגלל ש E_n סדרת קבוצות עולה - המידה מתכנסת למידת האחוד כלומר:

$$\lim \int_{E_n} cs(x) d\mu = \lim \phi(E_n) = \phi(X) = \int_X csd\mu$$

ולכן

$$\alpha = \lim \int_X f_n d\mu \geq \int_X csd\mu$$

וזאת לכל $c \in [0, 1)$ ולכן עם אי-שוויון חלש גם עבור $c = 1$ וזאת לכל $s \leq f$ ולכן גם מתקיים:

$$\alpha \geq \int_X f d\mu$$

ולכן, בעצם $\int f d\mu = \alpha = \lim \int f_n d\mu$ $\square$

מסקנה 4 אם $f_n : X \to [0,\infty]$ סדרת פונקציות חיוביות, אז סדרת הסכומים החלקיים היא סדרה מונוטונית עולה ולכן:

$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

הוכחה - רק צריך להראות שאינטגרל הסכום הוא סכום האינטגרלים לכל סכום סופי של פונקציות, אבל אם ניקח סדרת פשוטות שמתכנסת ל f_1 וסדרת פשוטות שמתכנסת ל f_2 מונוטונית (הוכחנו שיש), אז מהמשפט נובע שאינטגרל הגבול הוא גבול האינטגרלים, ומכיוון שסדרת הסכומים של הפשוטות היא סדרת פשוטות המתכנסת ל $f_1 + f_2$ וסכום האינטגרלים של פונקציות פשוטות שווה לאינטגרל הסכום של הפשוטות, נקבל בגבול את הנדרש.

למה 1 (**הלמה של Fatou**) אם $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות אז:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \le \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

הוכחה - נגדיר את סדרת הפונקציות המתכנסת ל $\liminf$:

$$g_k = \inf_{n \ge k} f_n$$

אז ברור ש g_k סדרה מונוטונית עולה המתכנסת ל $\liminf f_n$ ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim \int g_k d\mu = \int \liminf f_n d\mu$$

אבל לכל k מתקיים ש $g_k \le f_k$ ולכן גם $\int g_k d\mu \le \int f_k d\mu$ ולכן גם בגבול:

$$\int \liminf f_n d\mu = \lim \int g_k d\mu \le \liminf \int f_k d\mu$$

□

משפט 10 (**כל פונקציה מגדירה מידה**) אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה אז $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ היא מידה חיובית. ולכל $g : X \to [0,\infty]$ מדידה:

$$\int_X g d\varphi = \int_X f g d\mu$$

הוכחה - ראשית ברור ש $\varphi(\emptyset) = 0$. אם ניקח E_i מדידות זרות שאיחודן הוא E אז:

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu = \int_X \sum_i \chi_{E_i} f d\mu = \sum_i \int_X f \chi_{E_i} d\mu = \sum_i \varphi(E_i)$$

ולכן φ מידה. כעת אם יש g ניקח סדרת פשוטות שמתכנסות אליה מונוטונית, כל פשוטה היא צירוף לינארי סופי של χ_{E_i} כלשהם ועבורם:

$$\int_X \chi_{E_i} d\varphi = \varphi(E_i) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_{E_i} f d\mu$$

ולכן זה נכון גם עבור הפשוטות, כק"ל ולכן זה נכון גם עבור g ממשפט ההתכנסות המונוטונית. □

הגדרה 14 (**$L^1(X,\mu)$**) בהנתן מידה חיובית μ על מרחב מדיד X נסמן ב $L^1(X,\mu)$ את אוסף כל הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{C}$ המקיימות ש $\int_X |f| d\mu < \infty$ (הפונקציות הללו יקראו פונקציות אינטגרביליות).

הגדרה 15 (**אינטגרל של פונקציה מרוכבת**) עבור $f = u + iv \in L^1(\mu)$ נגדיר:

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i(\int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu)$$

כאשר מכיוון ש $0 \le (u,v)^{\pm} \le |f|$ כל האינטגרלים מוגדרים וסופיים ולכן האינטגרל כולו מספר מרוכב סופי.

משפט 11 (**L^1 מרחב וקטורי ואינטגרל הוא פונקציונל לינארי עליו**) אם $f,g \in L^1$ אז גם לכל $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ מתקיים ש $\alpha f + \beta g \in L^1$ ויתר על כן:

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

הוכחה - כבר ראינו שק"ל של מדידות מדידה, צריך להראות שהאינטגרל מתכנס אבל זה ברור כי

$$|\alpha f + \beta g| \le |\alpha||f| + |\beta||g|$$

עכשיו צריך להראות שאינטגרל הסכום הוא סכום האינטגרלים ושאינטגרל של כפל בסקלר הוא כפל בסקלר של האינטגרל. אבל זה די ברור ישירות מהגדרה שדי להראות לפונקציות חיוביות וסקלרים ממשיים חיוביים, ואת זה כבר הראינו.

משפט 12 לכל $f \in L^1$ מתקיים: $|\int_X f d\mu| \le \int_X |f| d\mu$

הוכחה - נסמן $z = \int_X f d\mu$, אם $z = 0$ הטענה טריויאלית. אחרת נסמן $|z| = \alpha z$ אז:

$$|\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu =$$

מכיוון שצד שמאל ממשי אז גם צד ימין ממשי, וברור ש $u \le |\alpha f| = |f|$ ולכן:

$$= \int u d\mu \le \int |f| d\mu$$

□

משפט 13 (**משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג**) אם $f_n : X \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות מתכנסות נקודתית ל f וקיימת $g \in L^1(\mu)$ כך ש לכל n - $|f_n| \le g$ אזי פונקצית הגבול $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים:

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

ולכן (מהטענה הקודמת) גם:

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

הוכחה - ראשית - ראינו שגבול של מדידות מדיד עבור חיוביות, ולכן גם עבור מרוכבות זה די ברור. $|f_n| \le g$ ולכן גם בגבול נשמר אי-השוויון - $|f| \le g$ ולכן $f \in L^1$. לכל n:

$$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g \Longrightarrow 2g - |f_n - f| \ge 0$$

וקיבלנו סדרת פונקציות חיוביות שעבורן ניתן להשתמש בלמה של $Fatou$.

$$\int 2g d\mu = \int \lim_n (2g - |f_n - f|) d\mu \le \liminf_n \int (2g - |f_n - f|) d\mu =$$

$$= \int 2g d\mu + \liminf(-\int |f_n - f| d\mu) = \int 2g d\mu - \limsup \int |f_n - f| d\mu$$

ניתן לחסר $\int 2g d\mu$ משני האגפים כי הוא סופי ולקבל:

$$\limsup \int |f_n - f| d\mu \le 0$$

מצד שני זו סדרת מספרים חיוביים ולכן היא מוכרחה להתכנס לאפס. □

הגדרה 16 (**מידה שלמה**) מידה μ ו σ-אלגברה m נקראת שלמה אם לכל $E \in m$ עם $\mu(E) = 0$ מתקיים שלכל $A \subseteq E \Rightarrow A \in m$

משפט 14 אם נגדיר את m^* להיות אוסף כל תתי הקבוצות E של X עבורן קיימות $A \subseteq E \subseteq B$ מדידות עם $\mu(B \backslash A) = 0$ אז m^* היא σ-אלגברה, ואם נגדיר $\mu(E) = \mu(A)$ אז נקבל מידה שלמה.

הערה 2 m^* הנ"ל נקראת השלמת-μ של m, μ על m^* נקראת השלמת-μ.

הוכחה - ראשית נראה ש μ מוגדרת היטב: נניח שיש $B' \subseteq E \subseteq A'$, $B \subseteq E \subseteq A$, $\mu(B \setminus A) = 0 = \mu(B' \setminus A')$ אז נרצה להראות $\mu(A) = \mu(A')$ אבל זה קל כי:

$$A \setminus A' \subseteq E \setminus A' \subseteq B' \setminus A'$$

ולכן $\mu(A \setminus A') = 0$ ומטעמי סימטריה גם $\mu(A' \setminus A) = 0$ ולכן

$$\mu(A) = \mu(A \setminus A') + \mu(A \cap A') = \mu(A \cap A') = \mu(A' \cap A) + \mu(A' \setminus A) = \mu(A')$$

ברור ש $m \subseteq m^*$, לכן די להראות סגירות למשלים ואיחודים בני מניה: נניח ש $A \subseteq E \subseteq B$ אז $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$ ומתקיים: $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$ ולכן $E^c \in m^*$.
אם $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ אז $\bigcup A_n \subseteq \bigcup E_n \subseteq \bigcup B_n$ ומתקיים ש:

$$\mu(\bigcup B_n \setminus \bigcup A_n) = \mu(\bigcup(B_n \setminus (\bigcup A_n))) \leq \mu(\bigcup(B_n \setminus A_n)) \leq \sum \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

נראה ש μ מידה ביחס להגדרה הזו: ברור שדי להראות σ-אדיטיביות, ניקח $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ כאשר E_n זרות בזוגות, אז גם A_n זרות בזוגות ולכן $\mu(\bigcup E_n) = \mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n) = \sum \mu(E_n)$ $\square$

הגדרה 17 אם פונקציה מרוכבת f מוגדרת על קבוצה שמידת המשלים שלה הוא אפס, אז נאמר שהיא מוגדרת כמעט בכל מקום. אם פונקציה מוגדרת כ.ב.מ, כלומר על מדידה E והמקור של כל פתוחה מדיד: $f^{-1}(U) \cap E \in m$ אז נאמר ש f מדידה על X. אם $\int_E |f| d\mu < \infty$ אז נאמר ש $f \in L^1(X, \mu)$ ונגדיר את האינטגרל שלה על כל המרחב להיות $\int_X f d\mu = \int_E f d\mu$

משפט 15 אם f_n סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המוגדרות כ.ב.מ על X מקיימות ש $\sum \int |f_n| d\mu < \infty$ אז הטור מתכנס לפונקציה אינטגרבילית כ.ב.מ ומתקיים $\int f d\mu = \sum \int f d\mu$. (נשים לב שבהכרח כל $f_n \in L^1(\mu)$ אחרת ברור שטור האינטגרלים של הערכים המוחלטים לא מתכנס)

הוכחה - נגדיר את S להיות חיתוך התחומים של הפונקציות. אז ברור ש $\mu(S^c) = 0$ (איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס). נגדיר:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

. אז אנחנו יודעים מהמשפט על החלפת סדר סכימה ואינטגרציה ש :

$$\int \varphi d\mu = \sum \int |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \varphi \in L^1$$

ולכן φ סופית כמעט בכל מקום (אחרת האינטגרל היה מתבדר). נגדיר את $E = \varphi^{-1}((-\infty, \infty))$ להיות הקבוצה עליה φ סופית. אז על E מתקיים ש $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ולכן בהחלט מתכנס, ולכן שם f מוגדרת היטב ואף $|f| \leq \varphi$ וגם כל הסכומים החלקיים נשלטים ע"י φ ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע ש f אינטגרבילית ושהאינטגרל שלה הוא טור האינטגרלים. $\square$

טענה 2
- עבור $f : X \to [0, \infty]$, אם $\int_E f d\mu = 0$ אז $f = 0$ כ.ב.מ על E
- עבור $f \in L^1(\mu)$ אם $\int_E f d\mu = 0$ לכל $E \in m$ אז $f = 0$ כ.ב.מ על X
- עבור $f \in L^1(\mu)$ אם $|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$ אז יש α קבועה כך ש $|f| = \alpha f$ כ.ב.מ

הוכחה -
- נגדיר $A_n = \{x \in E | f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ אז $\mu(A_n) = 0$ לכל n אחרת $\int_E f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$. ולכן גם $\mu(\bigcup A_n) = 0$ ו f חיובית רק שם ומתאפסת מחוצה לו.

- נתבונן ב $f = u + iv$ ונסתכל למשל על u^+. נגדיר $E = \{x \in X | u(x) \geq 0\}$ אז u^+ מתאפסת מחוץ ל E ועל E מתקיים ש $\int_E f d\mu = 0$ ולכן גם החלק הממשי $\int_E u^+ d\mu = \int_E u d\mu = 0$ ולכן מהסעיף הראשון נובע ש $u = 0$ כ.ב.מ על E ולכן מתאפסת כ.ב.מ על X. כנ"ל עבור $u^-, v^\pm$

• נגדיר את α להיות זו עבורה $\alpha \int_X f d\mu = |\int_X f d\mu|$ אז:

$$\int_X |f| d\mu = |\int_X f d\mu| = \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu = \int_X \Re(\alpha f) d\mu + i \int_X \Im(\alpha f) d\mu$$

מכיוון שצד שמאל ממשי אז גם צד ימין ונקבל ש $\int_X \Re(\alpha f) - |f| d\mu = 0$ מכיוון ש $\Re(\alpha f) \leq |\alpha f| = |f|$ נקבל לפי הסעיף הראשון ש $|f| = \Re(\alpha f)$ כ.ב.מ. כאשר השוויון לא ייתכן אם αf אינה ממשית (יהיה אי-שוויון חזק במקרה כזה) ולכן קיבלנו $|f| = \alpha f$

□

משפט 16 עבור מרחב ממידה סופית, אם יש קבוצה סגורה S במישור המרוכב עבורה לכל $E \in m$ עם $\mu(E) > 0$ מתקיים ש $A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ אז $f(x) \in S$ כ.ב.מ

הוכחה - אם S סגורה אז משלימתה פתוחה ולכן ניתן להציגה כאיחוד בן מניה של כדורים פתוחים וכל כדור אפשר להציג כאיחוד בן מניה של כדורים סגורים. לכן את $f^{-1}(S^c)$ ניתן להציג כאיחוד בן מניה של מקורות של כדורים סגורים. די להראות שהמקור של כל אחד מהם ממידה אפס. נניח בשלילה שיש כדור סגור עם מרכז α ברדיוס r במשלים של S עם $\mu(f^{-1}(B(\alpha, r)) > 0$ אז מתקיים ש: (נסמן ב $E = f^{-1}(B(\alpha, r))$ את המקור)

$$|A_E(f) - \alpha)| = |\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \alpha| = |\frac{1}{\mu(E)} (\int_E f d\mu - \int_E \alpha d\mu| =$$

$$= |\frac{1}{\mu(E)} \int_E (f - \alpha) d\mu| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r d\mu = r$$

אבל זה לא ייתכן כי $A_E(f) \in S$ ולכן לא יכולה להיות בכדור. ולכן לא ייתכן שלמקור הכדור יש מידה חיובית. □

משפט 17 אם μ מידה חיובית ויש סדרת מדידות E_n עם $\sum \mu(E_n) < \infty$ אז כמעט כל $x \in X$ נמצא רק במספר סופי מתוך הE_nים.

הוכחה - נגדיר $g(x) = \sum \chi_{E_n}$, אז אנחנו מחפשים את מידת ה xים עבורם $g(x) = \infty$, אבל:

$$\int |g(x)| d\mu = \sum \int \chi_{E_n} d\mu = \sum \mu(E_n) < \infty$$

ולכן $g \in L^1$ ולכן לא יכול לקבל אינסוף על קבוצה ממידה חיובית. כלומר - מידת האיברים שנמצאים באינסוף מה E_nים היא אפס. □

הגדרה 18 ($C_c(X)$) עבור מרחב טופולוגי X נסמן ב $C_c(X)$ את מרחב הפונקציות המרוכבות הרציפות על X עם תומך קומפקטי

הגדרה 19 (**פונקציונל לינארי חיובי**) עבור פונקציונל לינארי Λ על $C_c(X)$ נאמר שהוא חיובי אם לכל $f \in C_c(X)$ שהיא ממשית חיובית - $f \geq 0$ מתקיים $\Lambda f \geq 0$

הגדרה 20 (**רגולריות פנימית**) מידה μ תקרא רגולרית פנימית אם לכל $E \in m$ מתקיים ש

$$\mu(E) = \sup \{\mu(K) | K \subseteq E, K \, is \ compact\}$$

הגדרה 21 (**רגולריות חיצונית**) מידה μ תקרא רגולרית חיצונית אם לכל $E \in m$ מתקיים ש

$$\mu(E) = \inf \{\mu(U) | E \subseteq U, U \ is \ open\}$$

הגדרה 22 (**רגולריות**) מידה תקרא רגולרית אם היא רגולרית פנימית וגם רגולרית חיצונית

משפט 18 (**משפט ההצגה של Riesz - במרחב σ-קומפקטי**) יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי-מקומית ו σ-קומפקטי ו Λ פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$ אז קיימת מידת בורל רגולרית יחידה על X המקיימת שלכל $f \in C_c(X)$:

$$\int f d\mu = \Lambda f$$

הגדרה 23 (**קבוצה כפופה לפונקציה**) אם K קומפקטית $f \in C_c(X)$ מקיימת $0 \leq f \leq 1$ ו $\forall x \in K : f(x) = 1$ נסמן $K \prec f$ ונאמר ש K כפופה ל f, אם V פתוחה ו $\forall x \in V^c : f(x) = 0$ נסמן $f \prec V$ ונאמר ש f כפופה ל v.

למה 2 (**הלמה של Urysohn**) אם X האוסדורף קומפקטי מקומית, U פתוחה ו $K \subset U$ קומפקטית אז יש $K \prec f \prec V$

משפט 19 אם X האוסדורף קומפקטי מקומית, $U_1 \ldots U_n$ פתוחות ו $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$ אז יש פונקציות $h_i \prec U_i$ כך ש $h_1 + \ldots + h_n = 1$ על K.

הגדרה 24 (**מידה חיצונית**) מידה חיצונית היא פונקציה $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ עם התכונות הבאות:

- $\varphi(\emptyset) = 0$
- מונוטוניות - $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- תת-אדיטיביות - לכל סדרת קבוצות $\{A_n\}$ (לאו דווקא זרות) מתקיים $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$

משפט 20 (**משפט ההצגה של Riesz בניסוח כללי**) יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית, Λ פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$, אז קיימת σ-אלגברה m על X המכילה את כל קבוצות בורל, ומידה חיובית שלמה יחידה μ על m המקיימת את התנאים הבאים:

- $\Lambda f = \int f d\mu$ לכל $f \in C_c(X)$
- $\mu(K) < \infty$ לכל K קומפקטית
- μ רגולרית חיצונית
- $\mu(E) = \sup \{\mu(K) | K \subseteq E, K is\ compact\}$ לכל E עם מידה סופית או פתוחה.

הוכחה -
- יחידות: נניח שיש שתי מידות μ_1, μ_2 המקיימות את תנאי המשפט. אם נראה שהן מזדהות על קומפקטיות, אז מרגולריות פנימית עבור פתוחות הן תזדהנה על כל הפתוחות, ומרגולריות חיצונית נקבל שהן תזדהנה על כל הקבוצות המדידות. תהי K קומפקטית, אז מכיוון שמידתה סופית, ומרגולריות חיצונית, יש $V \supseteq K$ פתוחה עם $\mu_2(V \setminus K) < \varepsilon$ ניקח מהלמה של אוריסון $K \prec f \prec V$ ואז:

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) \leq \mu_2(K) + \varepsilon$$

וזאת לכל ε ולכן $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$, מטעמי סימטריה גם $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$ ולכן $\mu_1(K) = \mu_2(K)$

- הגדרת המידה והσ-אלגברה: נגדיר ראשית μ על כל תתי הקבוצות של X ונראה שהיא מידה חיצונית. עבור U פתוחה נגדיר:

$$\mu(U) = \sup_{f \prec U} \Lambda f$$

וכעת נגדיר לכל קבוצה כך שתתקיים רגולריות חיצונית:

$$\mu(E) = \inf_{E \subseteq U} \mu(U)$$

קל לראות שהמידה מונוטונית עבור פתוחות ולכן ההגדרה השניה מתלכדת עם הראשונה עבורן. נגדיר כעת את m_F להיות אוסף כל תת הקבוצות עבורן $\mu(E) < \infty$ ומתקיימת רגולריות פנימית - $\mu(E) = \sup_{K \subseteq E} \mu(K)$. ולבסוף נגדיר את ה σ-אלגברה m להיות:

$$m = \{E \subseteq X\ ;\ E \cap K \in m_F\ \text{ לכל } K \text{ קומפקטית }\}$$

- μ היא מידה חיצונית: ראינו ש μ מונוטונית וברור מההגדרה ש $\mu(\emptyset) = 0$ ולכן די להראות תת-אדיטיביות:

נראה ראשית עבור זוג פתוחות V_1, V_2: ניקח $g \prec V_1 \cup V_2$ אז $g \in C_c(X)$ ולכן מהמסקנה מהלמה של אוריסון יש $h_1 \prec V_1$, $h_2 \prec V_2$ כך ש $h_1 + h_2 = 1$ על $supp(g)$ ולכן $(h_1 + h_2)g = g$ וגם קל להווכח ש $h_1 g \prec V_1$, $h_2 g \prec V_2$ ולכן:

$$\Lambda g = \Lambda((h1 + h2)g) = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

ואם ניקח סופרימום על כל ה gים נקבל ש

$$\mu(V_1 + V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

ולכן באינדוקציה זה נכון גם לכל מספר סופי של פתוחות.

כעת נראה עבור אוסף כלשהו של קבוצות $\{E_i\} \in \mathcal{P}(X)$: אם לאחת הקבוצות $\mu(E_i) = \infty$ אז זה ברור, נטפל במקרה שכולן ממידה סופית - נבחר $\varepsilon > 0$ ולכל אחת ניקח $E_i \subseteq V_i$ פתוחה כך ש $\mu(V_i) - \mu(E_i) \leq \varepsilon 2^{-i}$ מהגדרת μ. נסמן $V = \bigcup V_i$ ונראה $\mu(V) \leq \sum_i \mu(E_i) + \varepsilon$: ניקח איזו $V \prec g$ אז $supp(g) \subseteq V$ וקומפקטי ולכן יש תת כיסוי סופי: $\{V_i\}_{i=1}^n$ ולכן:

$$\Lambda g \leq \mu(\bigcup_{i=1}^n V_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) + \varepsilon$$

גם כשניקח סופרימום על כל ה gים הכפופים ל V נשמר את אי השוויון ולכן

$$\mu(\bigcup E_i) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) + \varepsilon$$

וזאת לכל $\varepsilon > 0$ ולכן הראינו תת-אדיטיביות.

- יש עוד מלא שלבים...

מרחבי L^p

הגדרה 25 (פונקציה קמורה) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ תקרא קמורה אם לכל צירוף קמור $p, (1-p)$ מתקיים:

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y)$$

הערה 3 f קמורה אמ"ם לכל $a < s < t < u < b$ מתקיים :

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

ואם f גזירה אז היא קמורה אמ"ם f' מונוטונית עולה.

משפט 21 (אי שוויון Jensen) אם Ω מרחב מידה ממידה $\mu(\Omega) = 1$ ו $f \in L^1(\Omega, \mu)$ ממשית שערכיה ב $a < f < b$ (כאשר a, b יכולים להיות גם $\pm\infty$) ואם $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ קמורה אזי:

$$\varphi(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega \varphi \circ f d\mu$$

הוכחה - נסמן $t = \int f d\mu$, מכיוון שמידת המרחב היא 1 אז קל לראות ש $t \in (a,b)$, נסמן גם:

$$\beta = \sup_{s \in (a,t)} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

אז ברור שלכל $s \in (a,t)$ מתקיים:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \beta$$

ומקמירות מתקיים שלכל $u \in (t,b)$

$$\beta \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

ואם נשלב את התוצאות נקבל שלכל $s \in (a,b)$ מתקיים ש:

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t)$$

נציב $s = f(x)$ ונקבל

$$(\varphi \circ f)(x) \geq \varphi(\int f d\mu) + \beta(f(x) - t)$$

נבצע אינטגרציה לשני האגפים על כל Ω ונקבל (נזכור ש $\int t d\mu = t = \int f d\mu$) :

$$\int (\varphi \circ f) d\mu - \varphi(\int f d\mu) + \beta(\int f d\mu - \int f d\mu) \geq= 0$$

כלומר

$$\int (\varphi \circ f) d\mu \geq \varphi(\int f d\mu)$$

□

הגדרה 26 (אקספוננטים צמודים) נאמר ש $p,q\in\mathbb{N}$ הם אקספוננטים צמודים אם מתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

משפט 22 (אי שוויון Hölder) אם p,q אקספוננטים צמודים, כאשר $1<p<\infty$ ו $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות אז:

$$\int(fg)d\mu\le(\int f^pd\mu)^{1/p}(\int g^qd\mu)^{1/q}$$

הוכחה - נסמן $A=(\int f^pd\mu)^{1/p}$, $B=(\int g^qd\mu)^{1/q}$. אם צד שמאל מתאפס אז אי השוויון מתקיים טריויאלית. אחרת $fg>0$ כ.ב.מ ולכן גם כל אחת מהן ולכן $A,B\neq 0$. אם אחד מבין A,B הוא אינסוף אז אי השוויון מתקיים טריויאלית, אז די להוכיח למקרה שהם סופיים. לכן אפשר לחלק בנורמות הנ"ל ולהניח $A=B=1$ (כלומר נגדיר $f=f/A$, $g=g/B$). בכל מקום שבו $f(x),g(x)\neq 0$ נגדיר כעת $s(x),t(x)$ כך ש:

$$f(x)=e^{s(x)/p}\qquad g(x)=e^{t(x)/q}$$

מקמירות האקספוננט נקבל:

$$e^{s/p+t/q}\le\frac{1}{p}e^s+\frac{1}{q}e^t$$

ואם נציב חזרה:

$$f(x)g(x)\le\frac{1}{p}f(x)^p+\frac{1}{q}g(x)^q$$

וזה נכון גם כאשר $f(x)=0$ או $g(x)=0$ ולכן בכל מקום. לכן אינטגרציה על שני האגפים תתן:

$$\int(fg)d\mu\le\frac{1}{p}\int f^pd\mu+\frac{1}{q}\int g^qd\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

□

משפט 23 (אי שוויון Minkowski) עבור $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות מתקיים לכל $1<p<\infty$

$$\left(\int(f+g)^pd\mu\right)^{1/p}\le\left(\int f^pd\mu\right)^{1/p}+(\int g^pd\mu)^{1/p}$$

הוכחה - אם אגף שמאל מתאפס, אי השוויון מתקיים באופן טריויאלי, וכן אם אגף ימין הוא אינסוף, לכן נניח ששני הדברים לא קורים. במקרה זה, מקמירות $t\mapsto t^p$ מתקיים ש

$$(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g)^p\le\frac{1}{2}f^p+\frac{1}{2}g^p$$

לכן אם האינטגרל בצד ימין סופי אז גם האינטגרל בצד שמאל סופי. נפרק את הפונקציה לשני חלקים:

$$(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$$

בכל אחד מהחלקים ניתן להשתמש באי שוויון *Hölder* ולקבל (נגדיר את q להיות האקספוננט הצמוד ל p):

$$\int f(f+g)^{p-1}d\mu\le(\int f^pd\mu)^{1/p}(\int(f+g)^{(p-1)q}d\mu)^{1/q}$$

$$\int g(f+g)^{p-1}d\mu\le(\int g^pd\mu)^{1/p}(\int(f+g)^{(p-1)q}d\mu)^{1/q}$$

נחבר כעת את שתי התוצאות ונשים לב ש $(p-1)q=p$:

$$\int(f+g)^pd\mu\le\left[(\int f^pd\mu)^{1/p}+(\int g^pd\mu)^{1/p}\right](\int(f+g)^pd\mu)^{1/q}$$

הנחנו שאנחנו במקרה שבו $0<\int(f+g)^p<\infty$ ולכן ניתן לחלק בו את שני האגפים ולקבל בצד שמאל את $(\int(f+g)^pd\mu)^{1-1/q}=(\int(f+g)^pd\mu)^{1/p}$ כמו שרצינו. □

הגדרה 27 (**נורמת-p**) במרחב מידה X נגדיר לכל $f:X\to\mathbb{C}$

$$\|f\|_p=(\int|f|^pd\mu)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 28 (**המרחב-**$\mathcal{L}^p$) נגדיר את המרחב $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ להיות מרחב כל הפונקציות המרוכבות המדידות המוגדרות כ.ב.מ על X עם נורמת-p סופית.

הערה 4 כאשר X בן מניה, ומוגדרת עליו מידת המניה, אז איברי $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ הן סדרות מספרים $(a_n)_{n\in X}$ שהטור שהן מגדירות מתכנס בהחלט ובחזקת-p

$$\|(a_n)\|_p=(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{1/p}$$

הגדרה 29 (**הסופרימום העיקרי / נורמת-אינסוף**) עבור $g:X\to[0,\infty]$ נגדיר את הסופרימום העיקרי שלה להיות:

$$ess.sup(g)=\inf\left\{M\in R\ ;\ \mu(g^{-1}((M,\infty]))=0\right\}$$

ונגדיר $ess.supg=\infty$ אם הקבוצה ריקה. כדאי לשים לב שזה שקול ל:

$$ess.sup(g)=\sup\left\{M\in R\ ;\ \exists Y\subseteq X,\mu(Y)>0,\forall x\in Y(f(x)\geq M)\right\}$$

כעת לכל $f:X\to\mathbb{C}$ נגדיר:

$$\|f\|_\infty=ess.sup|f|$$

הגדרה 30 (**המרחב-**$\mathcal{L}^\infty$) נגדיר את המרחב $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ להיות מרחב כל הפונקציות המרוכבות המדידות המוגדרות כ.ב.מ על X עם נורמת-∞ סופית. פונקציות אלו נקראות פונקציות חסומות-עיקרית.

טענה 3 אם p,q אקספוננטים צמודים, $g\in\mathcal{L}^p$, $f\in\mathcal{L}^q$ אז $fg\in\mathcal{L}^1$ ויתר על כן

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$$

הוכחה - עבור p,q סופיים זה מיידי מאי-שוויון הלדר. עבור $p,q=1,\infty$ נניח בה"כ ש $p=\infty$ ואז, מכיוון שכ.ב.מ $|f|\leq\|f\|_\infty$

$$\int|fg|d\mu\leq\|f\|_\infty\int|g|d\mu=\|f\|_\infty\|g\|_1$$

□

טענה 4 ($\mathcal{L}^p$ **הוא מרחב וקטורי**) אם $f,g\in\mathcal{L}^p\Rightarrow f+g\in\mathcal{L}^p$ ויתר על כן:

$$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$$

ובנוסף לכל $\alpha\in\mathbb{C}$ מתקיים ש $\alpha f\in\mathcal{L}^p$ עם:

$$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$$

הוכחה - עבור $p\neq1$ סופי זה פשוט משפט מינקובסקי, עבור $p=1$ זה אי שוויון המשולש, ועבור $p=\infty$ זה נובע מכך שכ.ב.מ $|f+g|\leq|f|+|g|\leq ess.sup|f|+ess.sup|g|$ ולכן המידה של קבוצה שבה $|f+g|>ess.sup|f|+ess.sup|g|$ היא אפס ולכן בהכרח $ess.sup|f+g|\leq ess.sup|f|+ess.sup|g|$. עבור כפל בסקלר - ברור מהגדרת האינטגרל והסופר-ימום העיקרי. □

הגדרה 31 (**מרחבי** L^p) נגדיר יחס שקילות על $\mathcal{L}^p$ ע"י $f\sim g\Leftrightarrow f=g$(כמעט בכל מקום) ונגדיר את מרחב מחלקות השקילות $L^p(X,\mu)=\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$. זהו גם מרחב וקטורי שעליו $\|\cdot\|_p$ היא נורמה.

משפט 24 (**שלמות** L^p) לכל $1 \le p \le \infty$ L^p הוא מרחב מטרי שלם.

הוכחה - תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב L^p. נוכיח ראשית עבור p סופי. ניקח תת סדרה של סדרת קושי עבורה

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \le 2^{-k}$$

ונגדיר:

$$g_1 = f_{n_1} \ ; \ g_N = \sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \ ; \ g = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

א.ש.מ ב L^p יתן ש:

$$\|g_n\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \le \sum 2^{-k} = 1$$

נרצה להשתמש עכשיו בלמה של פאטו:

$$\int g^p d\mu = \int (\liminf g_n)^p d\mu = \int (\liminf (g_n^p)) d\mu \le \liminf \int g_n^p d\mu \le 1$$

ולכן גם $\|g\|_p \le 1$ ולכן היא בפרט סופית כ.ב.מ, כלומר כ.ב.מ הטור:

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}$$

מתכנס בהחלט ולכן בהחלט מתכנס (השוויון האחרון הוא כי הטור טלסקופי). כעת צריך להראות ש f הנ"ל היא ב L^p ושיש התכנסות ב L^p: בשביל זה נשתמש בלמה של פאטו:

$$\int |f - f_m|^p d\mu = \int \liminf_{k \to \infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \le \liminf_{k \to \infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \stackrel{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

השאיפה לאפס היא מתנאי קושי. כלומר לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שלכל $n_k, m > N$ מתקיים ש $\int |f_{n_k} - f_m|^p d\mu < \varepsilon$ ולכן גם $\int |f - f_m|^p d\mu < \varepsilon$ ולכן $\|f - f_m\|_p \le \varepsilon^p$. ולכן יש התכנסות ב L^p. ובנוסף - לכל m מתקיים $f - f_m \in L^p$ ולכן גם $f \in L^p$

כעת נוכיח עבור $p = \infty$. נסמן את הקבוצות שבהן $|f_k|, |f_n - f_m|$ עולות מעל הסופרימום העיקרי שלהן ב:

$$A_k = \{x; |f_k(x)| \ge \|f_k\|_\infty\}$$

$$B_{m,n} = \{x; |f_n(x) - f_m(x)| \ge \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

כמובן שכל הקבוצות הללו הן ממידה אפס ולכן גם איחודן ממידה אפס. נסמן $E = \bigcup A_k \cup \bigcup B_{m,n}$ אז על E^c כל הפונקציות חסומות ע"י הנורמה שלהן, וגם ההפרשים שלהן חסומים במידה שווה ע"י סדרה ששואפת לאפס, ולכן זוהי סדרת קושי במידה-שווה של פונקציות חסומות, ולכן היא מתכנסת במידה שווה לפונקציה חסומה. (סדרת קושי במידה שווה מתכנסת במידה שווה, ואם ניקח $\varepsilon = 1$ למשל, נגלה שהגבול חסום בין $f_1 - 1$ לבין $f_1 + 1$ ובפרט חסום.) כל פונקציה חסומה היא ב L^∞ (כי הסופרימום העיקרי קטן מהחסם). ויש התכנסות בנורמה כי

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup_{x \in X} |f_n - f| \to 0$$

□

הערה 5 בד"כ התכנסות בנורמה לא גוררת התכנסות נקודתית, אבל ההוכחה הזו מראה שלכל סדרה מתכנסת בנורמה יש תת-סדרה שמתכנסת נקודתית

משפט 25 (**צפיפות הפונקציות הפשוטות עם תומך סופי**) אוסף הפונקציות הפשוטות המדידות s עם

$$\mu(\{x; s(x) \neq 0\}) < \infty$$

צפוף ב L^p לכל $1 \le p < \infty$ סופי. (אוסף זה יסומן ב S)

הוכחה - נוכיח תחילה עבור פונקציות חיוביות ממשיות ואז עבור פונקציה $f = u + iv$ מרוכבת מתקיים ש $f^* =$ $u - iv \in L^p$ מכיוון ש $|f| = |f^*|$ ולכן גם $u, v \in L^p$ ומכיוון ש $|u^{\pm}| \le |u|$ נובע שגם $u^{\pm}, v^{\pm} \in L^p$ ואם אפשר לקרב אותן על ידי פשוטות אז אפשר לקחת את הקומבינציה הלינארית המתאימה של פשוטות ולקרב את f. אז תהי $f \ge 0 \in L^p$, ראינו במשפט קודם שיש סדרת פשוטות $s_n \to f$ נקודתית מלמטה, ולכן $s_n \in L^p$ ולכן לתומך שלה חייב להיות מידה סופית (אחרת האינטגרל היה אינסוף). נשים לב ש $|f - s_n| \le |f|$ ולכן גם $|f - s_n|^p \le |f|^p$ ולכן אפשר להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ולקבל:

$$\lim \int |f - s_n|^p d\mu = \int \lim |f - s_n|^p d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

ולכן $s_n \to f$ ב L^p. $\square$

משפט 26 (**משפט Lusin**) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, ו μ מידת בורל רגולרית חיובית עליו, שנותנת מידה סופית לקומפקטיות, אזי לכל $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית A ולכל $\varepsilon > 0$ יש $g \in C_c(X)$ רציפה שמתלכדת עם f פרט אולי לקבוצה ממידה ε. בנוסף - ניתן לבחור את g כך ש $\sup|g| \le \sup|f|$

הוכחה - נוכיח תחילה עבור $0 \le f < 1$ חסומה חיובית ו A קומפקטית, ונכליל אחר כך.

ניקח סדרה של פונקציות פשוטות s_n המתכנסות ל f נקודתית מלמטה. בהוכחת הקיום של סדרה כזו בנינו סדרה כך שכל שתי פונקציות עוקבות מקיימות:

$$t_n := s_n - s_{n-1} = 2^{-n}\chi_{T_n}$$

עם T_n מדידה. סימנו את סדרת ההפרשים ב t_n ונגדיר ש $t_1 = s_1$. כך ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) = f(x) \quad \text{וכן} \quad 2^n t_n = \chi_{T_n}$$

הנחנו ש A קומפקטית במרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ולכן קיימות $A \subseteq V \subseteq \bar{V}$ כך ש V פתוחה ו $\bar{V}$ קומפקטית. לכל n $T_n \subseteq A$ ולכן ממידה סופית, ולכן מרגולריות המידה קל לראות שיש

$$K_n \subseteq T_n \subseteq V_n \subseteq V$$

קומפקטית מלמטה ופתוחה מלמעלה שמידת ההפרש שלהן $\mu(V_n \setminus K_n) \le 2^{-n}\varepsilon$. בעזרת הלמה של אוריסון ניתן לקבל פונקציות רציפות $K_n \prec h_n \prec V_n$, נטען שהן קירוב טוב של t_n ולכן גם של f. נסמן :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$$

למשל, לפי ה M-$Test$ של ויירשטראס קל לראות שהטור מתכנס במ"ש על כל המרחב ולכן ההתכנסות היא גם ל g רציפה. מכיוון שכל h_n מתאפס מחוץ ל $V_n \subseteq \bar{V}$ אז גם $supp(g) \subseteq \bar{V} \Rightarrow g \in C_c(X)$. פרט לקבוצה $V_n \setminus K_n$ יש התלכדות $2^{-n}h_n = 2^{-n}\chi_{T_n} = t_n$ ולכן $g(x) = f(x)$ על כל המרחב פרט ל $\bigcup (V_n \setminus K_n)$ ו -

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n \setminus K_n)) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \setminus K_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon$$

כנדרש.

כעת - עבור f מרוכבת חסומה כלשהי אפשר להציגה כק"ל של f חיוביים חסומים ולקחת את ה g שהיא הק"ל המתאימה של ה gים המתאימים. עבור f מרוכבת שאינה חסומה אפשר לקחת קבוצה שעליה f חסומה ושהמשלים שלה ממידה ε כי :

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \ : \ f(x) > n\}) = \mu(\emptyset) = 0$$

(להתכנסות המידות צריך לדרוש שהן סופיות, אבל כל הקבוצות הנ"ל מוכלות ב A שהיא ממידה סופית).

עבור A ממידה סופית שאינה בהכרח קומפקטית, אפשר לקחת מרגולריות איזו $K \subseteq A$ קומפקטית כך ש $\varepsilon \ge \mu(A \setminus K)$

ולסיום - נראה שאפשר לבחור את g כך ש $\sup|g| \le \sup|f|$ - נסמן ב $R = \sup|f|$ אם $R = \infty$ אז אין צורך לשנות את g, אחרת נגדיר:

$$\varphi(z) = \begin{cases} z & |z| \le R \\ \frac{Rz}{|z|} & R < |z| \end{cases}$$

קל לראות שעכשיו אם ניקח $\tilde{g} = \varphi \circ g$ נקבל פונקציה רציפה וחסומה, כי φ מעתיקה ברציפות את המישור לדיסקה ברדיוס R, והיא לא משנה את g בכל הנקודות שבהן $g = f$ ולכן $\tilde{g}$ גם מקיימת את הנדרש. $\square$

מסקנה 5 באותם תנאים - אפשר למצוא סדרת רציפות $g_n \to f$ נקודתית כ.ב.מ.

הוכחה - ניקח $g_n = f$ על E_n^c עם $\mu(E_n) \le 2^{-n}$, אז $\sum \mu E_n = 1 < \infty$ ולכן כמעט כל x נמצא רק במספר סופי של איברי E_n - כלומר כמעט לכל x יש התכנסות נקודתית $g_n(x) \to f(x)$ □

מסקנה 6 (צפיפות $C_c(X)$ ב $L^p(X,\mu)$) עבור מרחב האוסדורף קומפקטי מקומי כנ"ל עם מידה רגולרית שנותנת מידה סופית לקומפקטיות, אז לכל $1 \le p < \infty$ סופי מתקיים ש $C_c(X)$ צפופה ב $L^p(X,\mu)$

הוכחה - ראינו שהפשוטות בעלות תומך ממידה סופית צפופות ב L^p, לכן די למצוא $g \in C_c(X)$ בכל סביבה של כזו. עבור s פשוטה מדידה הנתמכת על קבוצה ממידה סופית אפשר להפעיל את משפט $Lusin$ ולקבל g המזדהה אתה פרט אולי לקבוצה E ממידה ε וכן $|g| \le \sup|s| < \infty$. נראה ש g הזו מספיק קרובה גם בנורמה:

$$\|g-s\|_p = (\int_X |g-s|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int_E |g-s|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le (\int_E (2\sup|s|)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon^{\frac{1}{p}} 2\sup|s|$$

ולכן קטן כרצוננו. □

הערה 6 (L^∞) $C_c(X)$ אינן צפופות ב L^∞, כי הנורמה עליהן היא בעצם $\|f\|_\infty = \sup|f|$ ולכן התכנסות של כאלו היא התכנסות במידה שווה, ולכן הגבול הוא תמיד פונקציה רציפה. בפרט - סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן הגבול קרוב עד כדי ε לאחת הפונקציות בסדרה המתאפסת מחוץ לקבוצה קומפקטית - כלומר לכל ε יש קומפקטית כך ש $|f| \le \varepsilon$ מחוץ ל K (כלומר f "מתאפסת באינסוף").

משפט 27 (משפט Egoroff) אם בקבוצה E במרחב מידה X עם מידה $\mu(E) < \infty$ מתקיים שסדרת פונקציות מרוכבות מדידות מתכנסת נקודתית כמעט בכל מקום - $f_n \to f$ אזי: לכל $\varepsilon > 0$ יש $F \subseteq E$ עם $\mu(F) \le \varepsilon$ ועל $E \setminus F$ ההתכנסות היא במידה שווה

הוכחה - נניח בה"כ שההתכנסות הנקודתית היא על כל E (אחרת נקח $\tilde{E} \subseteq E$ ו"נאבד" רק קבוצה ממידה אפס). נגדיר את E_n^m להיות הקבוצה עליה הזנב ה n-י של הסדרה נמצא בכדור ברדיוס $\frac{1}{m}$ מהגבול:

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x \in E \ ; \ |f_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} \right\}$$

אז מהגדרה - לכל m זוהי סדרה יורדת של קבוצות, ובגלל ההתכנסות הנקודתית, כל x שייך לאיזו E_n, כלומר לכל m:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus E_n^m) = \emptyset$$

ומכיוון ש E ממידה סופית נוכל להסיק שלכל m:

$$\mu(E \setminus E_n^m) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

לכן לכל m נוכל לבחור $n(m)$ עם

$$\mu(E \setminus E_{n(m)}^m) \le \varepsilon 2^{-m}$$

נגדיר עכשיו את

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{n(m)}^m)$$

אז קיבלנו $F \subseteq E$ מדידה עם

$$\mu(F) \le \sum \mu(E_{n(m)}^m) \le \varepsilon \sum 2^{-m} = \varepsilon$$

ועל $E \setminus F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n(m)}^m$ יש התכנסות במידה שווה כי לכל $\frac{1}{m}$ יש $N = n(m)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$E \setminus F \subseteq E_{n(m)}^m \subseteq E_n^m$$

ולכן $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{m}$ □

מידות מרוכבות

הגדרה 32 (**חלוקה של קבוצה**) במרחב מדיד X עם σ-אלגברה m, נגדיר חלוקה של קבוצה $E \in m$ להיות אוסף בן מניה של קבוצות זרות בזוגות $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$ עבורן $\bigcup E_i = E$

הגדרה 33 (**מידה מרוכבת**) מידה מרוכבת μ על מרחב מדיד X היא העתקה $\mu : m \to \mathbb{C}$ שהיא σ-אדיטיבית, כלומר לכל E_i זרות בזוגות מתקיים

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

ונשים לב שהטור חייב להתכנס בהחלט כדי שהמידה תהיה מוגדרת היטב.

הערה 7 מידה חיובית אינה מקרה פרטי של מידה מרוכבת, מידה חיובית יכולה לתת גם אינסוף.

הגדרה 34 (**הוריאציה הטוטאלית**) בהנתן מידה מרוכבת μ נגדיר פונקציה חדשה: $|\mu| : m \to [0, \infty)$ ע"י:

$$|\mu|(E) = \sup_{\{E_i\} \text{חלוקה של} E} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

משפט 28 (**מידת הוריאציה הטוטאלית**) לכל מידה מרוכבת μ, $|\mu|$ היא מידה חיובית על m

הוכחה - ראשית, ברור ש $|\mu|(\emptyset) = 0$. נראה σ-אדיטיביות: נניח E_i זרות בזוגות, אז הן בעצם חלוקה של $E = \bigcup_i E_i$.
נראה שוויון ע"י זוג אי שוויונים.
מצד אחד - לכל $\delta > 0$ אפשר לקחת חלוקה $A_{i,j}$ של E_i כך ש

$$\sum_j |\mu(A_{i,j})| > |\mu|(E_i) - \delta 2^{-i}$$

$\{A_{i,j}\}$ הנ"ל הן חלוקה של E ולכן מתקיים:

$$\sum_i |\mu(E_i)| - \delta \le \sum_{i,j} |\mu(A_{i,j})| \le |\mu|(E)$$

וגם בגבול $\delta \to 0$ נשמר אי השוויון.
מצד שני - לכל A_j חלוקה של E נסמן $A_{i,j} = A_j \cap E_i$ ואז:

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j |\sum_i \mu(A_{i,j})| \le \sum_{i,j} |\mu(A_{i,j})| = \sum_i (\sum_j |\mu(A_{i,j})|) \le \sum_i |\mu|(E_i)$$

כלומר לכל חלוקה מתקיים

$$\sum_j |\mu(A_j)| \le \sum_i |\mu|(E_i)$$

ולכן אי השוויון נשמר גם כשניקח סופרימום על כל החלוקות ולכן

$$|\mu|(E) \le \sum_i |\mu|(E_i)$$

נשלב את שני אי השוויונים בכדי לקבל שוויון. $\square$

הערה 8 $|\mu|(E) < \infty$ לכל קבוצה מדידה, כלומר - זוהי מידה סופית. הוכחנו זאת בתרגיל.

הערה 9 ברור שלכל E מתקיים $|\mu(E)| \le |\mu|(E)$.

הגדרה 35 (**פירוק Jordan**) עבור מידה מרוכבת המקבלת רק ערכים ממשיים (מידות כאלו נקראות מידות ממשיות / מידות מסומנות) נגדיר:

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \ , \ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

ונקבל זוג מידות ממשיות חיוביות, והפירוק

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

נקרא פירוק $Jordan$ של μ. כמובן שכל מידה מרוכבת ניתן להציג כ $\mu = u + iv$ עם u, v ממשיות, ולכן יש להן פירוק $Jordan$ ולכן את μ ניתן להציג כק"ל של מידות חיוביות. זה נקרא פירוק $Jordan$ של μ

הגדרה 36 (**רציפות לחלוטין**) עבור מידה חיובית μ ומידה כלשהי λ נאמר ש λ רציפה לחלוטין ביחס ל μ ונסמן $\lambda \ll \mu$ אם לכל E מדידה מתקיים $\mu(E)=0 \Rightarrow \lambda(E)=0$ עבור μ מרוכבת נאמר ש $\lambda \ll \mu$ אם היא רציפה לחלוטין ביחס ל $|\mu|$

הגדרה 37 (**מידה מרוכזת**) עבור מידה מרוכבת או חיובית λ נאמר שהיא מרוכזת על קבוצה $A \in m$ אם לכל E מדידה מתקיים ש $\lambda(E)=\lambda(E\cap A)$. כדאי לשים לב שזה שקול לכך ש $\lambda(E)=0$ לכל E שלא חותכת את A וזה גם שקול לכך ש $|\lambda|(X\setminus A)=0$

הגדרה 38 (**סינגולריות**) עבור μ מידה חיובית ו λ מידה כלשהי, נאמר ש λ סינגולרית ביחס ל μ אם היא מרוכזת על A עם $\mu(A)=0$ ונסמן $\lambda \perp \mu$ אם μ מידה מרוכבת נאמר ש λ סינגולרית ביחס ל μ אם היא סינגולרית ביחס ל $|\mu|$

הערה 10 סינגולריות זה באמת יחס הדדי כמו שהסימון מרמז. אם λ_1 מרוכזת על A עם $|\lambda_2|(A)=0$ אז λ_2 מרוכזת על A^c ו $|\lambda_1|(A^c)=0$ ואז גם λ_2 סינגולרית ביחס ל λ_1.

טענה 5 (**תכונות בסיסיות של מידות מרוכבות**) עבור מידה חיובית μ ומידות מרוכבות $\lambda_1,\lambda_2,\lambda$ אז -

- אם λ מרוכזת על A אז גם $|\lambda|$
- $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$
- $\lambda_1,\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 \perp \mu$
- $\lambda_1,\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 \ll \mu$
- $\lambda_1 \ll \mu \Rightarrow |\lambda_1| \ll \mu$
- אם $\mu \perp \lambda_1$ ו $\lambda_2 \ll \mu$ אז $\lambda_1 \perp \lambda_2$
- אם $\mu \perp \lambda$ ו $\lambda \ll \mu$ אז $\lambda \equiv 0$

הוכחה -
- ברור
- ברור מהסעיף הקודם
- ברור, נסתכל על איחוד הקבוצות שעליהן המידות מרוכזות
- הכי ברור
- $|\lambda|(E)=0 \Leftrightarrow \lambda(E)=0$
- λ_1 מרוכזת על A עם $\mu(A)=0 \Rightarrow \lambda_2(A)=0$ ולכן סינגולרית ביחס ל λ_2
- מהסעיף הקודם נובע $\lambda \perp \lambda$ וברור שזה אפשרי רק אם $\lambda \equiv 0$

הגדרה 39 (**מידה σ-סופית**) מידה תקרא σ-סופית אם יש סדרה E_n עם $\mu(E_n)<\infty$ ו $\bigcup E_n = X$

למה 3 במרחב מידה σ-סופי יש פונקציה חיובית ממש וחסומה $0<W(x)<1$ ב $L^1(X,\mu)$

הוכחה - ניקח כיסוי של X בקבוצות ממידה סופית E_n, ונגדיר את הפונקציה על E_n להיות $\frac{1}{1+\mu(E_n)}2^{-n}$, כלומר:

$$W_n = \frac{2^{-n}}{1+\mu(E_n)}\chi_{E_n}$$

$$W = \sum_n W_n$$

כל x נמצא לפחות באחת הE_nים ולכן הסכום יהיה בעל איבר אחד לפחות שיהיה תמיד חיובי. הסכום יהיה קטן מאחד כי $\sum 2^{-n}=1$. $W\in L^1$ כי :

$$\int |W|d\mu = \int W d\mu \le \sum_n \int_{E_n} W_n d\mu = \sum_n \frac{2^{-n}}{1+\mu(E_n)}\mu(E_n) \le \sum 2^{-n} = 1$$

$\square$

הגדרה 40 (**מרחבי בנך והילברט**) מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם מעל $\mathbb{C}$ (למשל - L^p) ומרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שלם מעל $\mathbb{C}$ (למשל L^2 עם המכפלה הפנימית $\int f\bar{g}d\mu =< f,g >$).

למה 4 (**מרחב הילברט כמעט דואלי לעצמו**) לכל פונקציונל לינארי חסום $L \in \mathcal{H}^*$ על מרחב הילברט $\mathcal{H}$ יש וקטור יחיד $v \in \mathcal{H}$ כך ש $L = \bar{v}$ כלומר:

$$\forall x \in \mathcal{H} : Lx =< x, v >$$

הוכחה - נסמן $M = \ker L$, וב - $M^\perp = \{x \in \mathcal{H} \; ; \; \forall y \in K :< x, y >= 0\}$ את המרחב הניצב לו. M תת מרחב וקטורי סגור, כי הפונקציונל חסום, ואז אם $x_n \to x$ סדרה מתכנסת של וקטורים אז

$$|Lx| = |Lx_n - Lx| = |L(x_n - x)| \leq \|L\|x_n - x\| \to 0\|$$

ולכן $Lx = 0$ ולכן $x \in M$. וזה נכון רק כי $\|L\|$ סופי. אם $M = X$ אז ברור ש $v = 0$ הוא הוקטור הנדרש. אחרת יש איזה $u \in M^c$. מכיוון ש M סגור - ההיטל של u עליו נמצא ב M ולכן אם נפחית מ u את ההיטל נקבל וקטור $z \neq 0 \in M^\perp$ וברור שאפשר לנרמל כך ש $\|z\| = 1$. נגדיר אופרטור שיעזור לנו אח"כ:

$$U(x) = (Lx)z - (Lz)x$$

נשים לב שלכל x מתקיים ש $L(U(x)) = L(x)L(z) - L(z)L(x) = 0$ כלומר $U(x) \in M \Rightarrow< U(x), z >= 0$ ועכשיו נציג את L בעזרת U -

$$L(x) = L(x) < z, z > - < U(x), z >=< L(x)z - U(x), z >=< L(z)x, z >=< x, L(\bar{z})z >$$

ולכן $v = L(\bar{z})z$ הוא הוקטור הנדרש. היחידות ברורה - אם $L = \bar{v} = \bar{v'}$ אז לכל x מתקיים $< x, v >=< x, v' >$ ובפרט עבור $x = v - v'$ נקבל $\|v - v'\| = 0$ כלומר - $v = v'$ $\square$

משפט 29 (**משפט הפירוק של לבג**) אם μ מידה חיובית σ-סופית על m, λ מידה מרוכבת על m אז ניתן לפרק את $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ כך ש $\lambda_s \perp \mu$ ו $\lambda_a \ll \mu$ ו λ_a, λ_s היחידות המקיימות תנאים אלו. ואם λ חיובית סופית אז כך גם λ_a, λ_s

משפט 30 (**משפט Radon-Nikodym**) אם μ מידה חיובית σ-סופית על m, λ מידה מרוכבת על m, ותהי $\lambda_a \ll \mu$ מפירוק לבג של λ אז יש $h \in L^1(X, \mu)$ יחידה כך ש $d\lambda_a = hd\mu$ (כלומר לכל $E \in m$ $\lambda_a(E) = \int_E hd\mu$)

הוכחת שני המשפטים גם יחד ראשית נראה יחידות בפירוק לבג - נניח

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$$

ולכן

$$\mu \perp \lambda_s - \lambda'_s = \lambda_a - \lambda'_a \ll \mu$$

וזוהי מידה שמצד אחד ניצבת ל μ ומצד שני גם רציפה לחלוטין ביחס אליה ולכן זוהי מידת האפס ולכן $\lambda_s = \lambda'_s, \lambda_a = \lambda'_a$.

נניח בה"כ ש λ מידה חיובית סופית. עבור מידה מרוכבת ניקח את הקומבינציה הלינארית של הפירוקים של החלקים הממשיים והמדומים החיוביים והשליליים שלה. ניקח $W \in L^1(\mu)$ חיובית חסומה $0 < W < 1$ המובטחת מהלמה. ונגדיר מידה חדשה:

$$d\varphi = d\lambda + Wd\mu$$

כלומר לכל $E \in m$ נגדיר $\varphi(E) = \lambda(E) + \int_E Wd\mu$. ראינו שלכל W חיובית מדידה $\nu(E) = \int_E Wd\mu$ היא מידה המקיימת ש $\int fd\nu = \int fWd\mu$ לכל f מדידה . וקל לראות שסכום המידות הוא מידה המקיימת ש

$$\int fd\varphi = \int fd\lambda + \int fWd\mu$$

המידה שקיבלנו היא מידה חיובית סופית. אז נתבונן במרחב ההילברט $L^2(\varphi)$ - ונראה ש $f \mapsto \int fd\lambda$ הוא פונקציונל לינארי חסום עליו:

$$|\int fd\lambda| \leq \int |f|d\lambda = \int |f|d\varphi - \int |f|Wd\mu \leq \int |f| \cdot 1d\varphi$$

ומאי שוויון קושי שוורץ:

$$=< f, 1 >=\leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2 \varphi(X)^{\frac{1}{2}}$$

לכן הנורמה האופרטורית של הפונקציונל היא לכל היותר $\varphi(X)^{\frac{1}{2}} < \infty$ ולכן, לפי הלמה, יש $\bar{g} \in L^2(\varphi)$ כך ש:

$$\int fd\lambda =< f, \bar{g} >= \int fgd\varphi$$

לכל $E \in m$ עם מידה חיובית $\varphi(E) > 0$ מתקיים:

$$\lambda(E) = \int \chi_E d\lambda = \int \chi_E g d\varphi = \int_E g d\varphi$$

וברור ש $\varphi(E) \geq \lambda(E)$ ולכן:

$$0 \leq A_E(g) = \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

ולכן לפי המשפט על ממוצעי פונקציות, נובע ש $g(x) \in [0,1]$ כמעט בכל מקום ביחס ל φ. אם נזכור שאיברי $L^2(\varphi)$ הם בעצם מחלקות שקילות של פונקציות שזהות כ.ב.מ נוכל פשוט לקחת $0 \leq g \leq 1$ ממש בכל מקום. נחזור כעת ל f כלשהי:

$$\int f d\lambda = < f, \bar{g} > = \int f g d\varphi = \int f g d\lambda + \int f g W d\mu$$

ונקבל את המשוואה:

$$\int f(1-g) d\lambda = \int f g W d\mu \tag{1}$$

נחלק עכשיו את המרחב לשתי קבוצות:

$$A = \{x \; ; \; g(x) \in [0,1)\} \quad , \quad B = \{x \; ; \; g(x) = 1\}$$

כעת נגדיר את λ_s להיות מרוכזת על B ואת λ_a להיות מרוכזת על $A = B^c$:

$$\lambda_s(E) = \lambda(E \cap B)$$

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A)$$

נראה ש $\lambda_s \perp \mu$: הגדרנו את λ_s להיות מרוכזת על B ואם נציב $f = \chi_B$ במשוואה נקבל (כי $g|_B = 1$):

$$0 = \int_B W d\mu$$

אבל W לא מתאפסת בשום מקום ולכן בהכרח $\mu(B) = 0$. נראה כעת את תוצאת משפט *Radon-Nikodym* - ניקח $E \in m$ כלשהי ו:

$$f_n = \chi_E(1 + g + g^2 + \ldots + g^n)$$

אז בצד שמאל של המשוואה נקבל טור טלסקופי:

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_E g(1 + g + g^2 + \ldots + g^n) W d\mu$$

האינטגרנד באגף שמאל מתכנס מונוטונית ל χ_A כי לכל $x \in B$ הוא תמיד 0 ולכל $x \in A$ $g(x) < 1$ ולכן $g^n(x) \to 0$ מונוטונית. האינטגרנד באגף ימין מתכנס מונוטונית לאיזו h כלשהי מדידה (כ sup של מדידות). ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int_E h d\mu = \int_E \chi_A d\lambda = \lambda(E \cap A) = \lambda_a(E)$$

כאשר h אינה תלויה ב E. מכאן גם ברור ש $\lambda_a \ll \mu$ כי אם $\mu(E) = 0$ אז $\int_E h d\mu = 0$. $\square$

טענה 6 עבור μ חיובית ו λ מרוכבת מתקיים ש $\lambda \ll \mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $E \in m$ - אם $\mu(E) \leq \delta$ אז $|\lambda|(E) \leq \varepsilon$

הוכחה - צד אחד ברור - אם $\mu(E) = 0$ אז $\mu(E) \leq \delta$ לכל $\delta > 0$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|\lambda|(E) \leq \varepsilon$ ולכן $\lambda(E) = 0$.

בכיוון השני - נניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta = 2^{-n}$ יש $E_n \in m$ עם $\mu(E_n) \leq 2^{-n}$ אבל $|\lambda|(E) > \varepsilon$ נגדיר

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_n$$

אז קיבלנו סדרה יורדת של קבוצות עם $\mu(A_n) \leq \sum i = n^{\infty} 2^{-n} = 2^{-n+1} \to 0$ ובפרט המידה של A_1 סופית ולכן

$$\mu(A = \bigcap A_n) = \lim \mu(A_n) = 0$$

מצד שני $0 \nrightarrow \varepsilon \leq |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(A_n)$ אבל גם $|\lambda|(A_1)$ סופית (כי וריאציה טוטלית של מידה מרוכבת היא סופית) ולכן $|\lambda|(A) = \lim |\lambda|(A_n) \neq 0$ ולכן לא ייתכן ש $\lambda \ll \mu$ $\square$

משפט 31 (**הפירוק הפולארי של מידה מרוכבת**) לכל מידה מרוכבת μ יש פונקציה מרוכבת מדידה h עם

$$\forall x : |h(x)| = 1$$

כך ש:

$$d\mu = hd|\mu|$$

הוכחה - ראשית - $|\mu| \ll \mu$ ולכן ממשפט רדון-ניקודים מובטחת $h \in L^1(|\mu|)$ כך ש $d\mu = hd|\mu|$. נראה ש $|h| = 1$ כ.ב.מ ביחס ל $|\mu|$ ולכן ניתן לקחת $|h| = 1$ ממש בכל מקום: ראשית נראה ש $|h| \geq 1$ כ.ב.מ - נסמן $A_r = \{x \ ; \ |h(x)| < r\}$ אז לכל חלוקה E_j של A_r מתקיים:

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j |\int_{E_j} hd|\mu|| \leq \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r)$$

ולכן אם ניקח סופרימום עדיין נקבל

$$|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$$

לכל $0 < r \leq 1$ זה גורר ש $|\mu|(A_r) = 0$ - כלומר - $|h(x)| \geq 1$ כמעט בכל מקום.
בכיוון השני - נראה ש $|h(x)| \leq 1$ בעזרת משפט הממוצעים - לכל $E \in m$ עם $|\mu|(E) > 0$ נחשב:

$$|\frac{1}{|\mu|(E)} \int_E hd||\mu| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

כלומר - כל הממוצעים של h בקטע $[-1, 1]$ ולכן גם $|h| \leq 1$ כ.ב.מ. לכן סה"כ קיבלנו ש $|h| = 1$ כמעט בכל מקום ביחס ל $|\mu|$ ולכן ניתן לבחור h אחרת במחלקת השקילות של h ב $L^1(|\mu|)$ עבורה $|h| = 1$ ממש בכל מקום. ☐

מסקנה 7 אם μ מידה חיובית ו $g \in L^1(\mu)$ ו $d\lambda = gd\mu$ אזי $d|\lambda| = |g|d\mu$

הוכחה - מצד אחד, לפי משפט הפירוק הפולארי יש $|h| = 1$ כך ש $d\lambda = hd|\lambda|$ מצד שני $d\lambda = gd\mu$ לכן $gd\mu = hd|\lambda|$ ולכן $d||\lambda| = \bar{h}gd\mu$ (כי $h^{-1} = \bar{h}$). אבל גם $|\lambda|$ וגם μ מידות חיוביות ולכן כמעט בכל מקום ביחס ל μ מתקיים: $\bar{h}g \geq 0$ ולכן $|g| = |\bar{h}g| = \bar{h}g$ כמעט בכל מקום ולכן $\bar{h}gd\mu = |g|d\mu$ ☐

מידת לבג על R^k

הגדרה 41 אם m היא מידת לבג על R^k ו μ מידה מרוכבת כלשהי על R^k אז מגדירים לכל $r > 0, x \in R^k$:

$$Q_r(\mu)(x) = \frac{\mu(B(x, r))}{m(B(x, r))}$$

הגדרה 42

$$(D\mu)(x) = \lim_{r \to 0} Q_r(\mu)(x)$$

הגדרה 43 (**הפונקציה המקסימלית**) עבור μ מידה חיובית סופית על R^k מגדירים: $M\mu : X \to [0, \infty]$

$$(M\mu)(x) = \sup_{0<r<\infty} Q_r(\mu)(x)$$

ועבור μ מרוכבת מגדירים $M\mu := M|\mu|$ ולכל פונקציה $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ מוגדרת המידה $df = fdm$ ואז אפשר להגדיר Mf באותו אופן.

טענה 7 לכל מידה חיובית סופית μ הפונקציה $Q_r(\mu)$ היא פונקציה מדידה, ולכן גם $M\mu$ היא מדידה כסופרימום של מדידות (אפשר לקחת סופרימום רק על הרציונליים כדי שתהיה קבוצה בת מניה)

למה 5 (**למה קומבינטורית**) אם יש קבוצה שהיא איחוד סופי של כדורים פתוחים

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$$

אז יש תת קבוצה של הכדורים $S \subseteq \{1 \ldots n\}$ עבורה

- הכדורים $B(x_i,r_i)$ לכל $i\in S$ הם זרים בזוגות.
- $W\subseteq\bigcup_{i\in S}B(x_i,3r_i)$
- $m(W)\leq 3^k\sum_{i\in S}m(B(x_i,r_i))$

הוכחה - נסדר את הכדורים בסדר יורד לפי הרדיוסים. את הכדור הגדול ביותר ניקח ל S. את הכדור הבא ב S נבחר להיות הראשון בסדרה שאינו חותך אף אחד מהכדורים שכבר ב S. נמשיך כך עד שנסיים לעבור על כל הסדרה - התהליך כמובן סופי. כעת לכל כדור שלא בחרנו - יש כדור גדול ממנו שכן בחרנו והוא חותך אותו. מאי שוויון המשולש קל לראות שאם נגדיל את רדיוס הכדור הגדול פי 3 הוא כבר יכסה לגמרי את הכדור הקטן. לכן הגדלת הרדיוסים פי 3 מכסה לגמרי את W. מכאן גם ברור שמידת W קטנה מסכום המידות של הכדורים בעלי הרדיוס הגדול יותר, שמידתם כמובן גדולה פי 3^k ממידת הכדורים המקוריים. $\square$

משפט 32 לכל מידה מרוכבת μ על $\mathbb{R}^k$ מתקיים שלכל $\lambda>0$:

$$m(\{x\ ;\ (M\mu)(x)>\lambda\})\leq\frac{3^k}{\lambda}|\mu|(\mathbb{R}^k)$$

הוכחה - ראשית נניח ש μ חיובית, אחרת נסתכל על $|\mu|$, לצורך המשפט אין הבדל כי $M\mu=M|\mu|$ בהגדרה. כעת נתבונן בקבוצה $\{M\mu>\lambda\}$ וניקח איזו קומפקטית K המוכלת בה. אז לכל $x\in K$ מתקיים ש $M\mu(x)>\lambda$ כלומר יש כדור סביב x - $B(x,r)$ עבורו

$$\frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}>\lambda$$

כלומר -

$$m(B(x,r))<\frac{1}{\lambda}\mu(B(x,r))$$

הכדורים הנ"ל מהווים כיסוי פתוח ל K ולכן יש להם תת כיסוי סופי. על הקבוצה הסופית של כדורים ניתן להפעיל את הלמה ולקבל כדורים זרים בזוגות כך ש:

$$m(K)\leq 3^k\sum_i m(B(x_i,r_i))\leq 3^k\frac{1}{\lambda}\sum_i\mu(B(x_i,r_i))\leq\frac{3^k}{\lambda}\mu(\mathbb{R}^k)$$

כאשר אי השוויון האחרון נובע מכך שהכדורים זרים בזוגות. לכן מרגולריות מידת לבג נוכל לקחת סופרימום על כל הקומפקטיות המוכלות בקבוצה ולשמר את אי השוויון $\square$

הגדרה 44 (**L^1-חלש**) נאמר שפונקציה מדידה ממשית f על $\mathbb{R}^k$ היא ב L^1-חלש אם יש קבוע חיובי $C>0$ כך שלכל $\lambda>0$ מתקיים

$$\lambda m(\{x\ ;\ |f(x)|>\lambda\})<C$$

מסקנה 8 לכל מידה מרוכבת μ מתקיים ש $M\mu$ היא ב L^1-חלש עם $C=3^k|\mu|(\mathbb{R}^k)$

טענה 8 (**$L^1\subseteq L^1$-חלש**) כל $f\in L^1(\mathbb{R}^k$ הוא ב L^1-חלש

הוכחה -

$$\lambda m(\{x\ ;\ |f(x)|>\lambda\})=\int_{\{x\ ;\ |f(x)|>\lambda\}}\lambda dm\leq\int_{\{x\ ;\ |f(x)|>\lambda\}}|f|dm\leq\int_X|f|dm=\|f\|_1$$

מסקנה 9 לכל $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ מתקיים:

$$\lambda m(\{x\ ;\ Mf(x)>\lambda\}\leq 3^k\|f\|_1$$

הוכחה - מיידי מהמשפט על ידי הצבת המידה המוגדרת ע"י f

הגדרה 45 (**נקודת לבג**) עבור פונקציה $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ נאמר שנקודה $x \in \mathbb{R}^k$ היא נקודת לבג של הפונקציה אם מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| dm = 0$$

הערה 11 כל נקודת רציפות של f היא כמובן גם נקודת לבג, כי עבור r מספיק קטן מתקיים $|f - f(x)| < \varepsilon$

משפט 33 (**כמעט כל נקודה היא נקודת לבג**) אם $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ אז כמעט כל נקודה $x \in \mathbb{R}^k$ היא נקודת לבג של f

הוכחה - נסמן:

$$T_r f(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| dm$$

ונגדיר

$$Tf(x) = \limsup_{r\to 0} T_r f(x)$$

אז $T_r \geq 0$ ולכן די להראות ש $Tf = 0$ כ.ב.מ ואז נוכל להסיק שהגבול קיים ושווה לאפס כ.ב.מ . ראינו שהפונקציות הרציפות צפופות ב $L^1(\mathbb{R}^n)$ ולכן לכל n יש פונקציה רציפה g עבורה

$$\|f - g\|_1 \leq \frac{1}{n}$$

וכמובן ש $Tg = 0$ כי היא רציפה ולכן כל נקודה שלה היא נקודת לבג. נסמן $h = f - g$ אז:

$$T_r h(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |h - h(x)| dm \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |h| + |h(x)| dm =$$

$$= \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |h| dm + |h(x)| \leq Mh(x) + |h(x)|$$

בנוסף, מאי שוויון המשולש אפשר להסיק:

$$T_r f(x) = \frac{1}{m(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |(g + h) - (g(x) + h(x))| dm \leq T_r h(x) + T_r g(x)$$

ולכן גם אם ניקח $\limsup_{r\to 0}$:

$$Tf(x) \leq Th(x) + Tg(x) = Th(x) \leq Mh(x) + |h(x)|$$

לכן לכל $t > 0$

$$\{Tf > 2t\} \subseteq \{Mh > t\} \cup \{|h| > t\}$$

אבל f, g הן ב L^1 ולכן גם h ולכן לפי הטענות הקודמות:

$$m(\{Mh > t\}) + m(\{|h| > t\}) \leq \frac{1}{t} 3^k \|h\|_1 + \frac{1}{t} \|h\|_1 \leq \frac{1}{t}\frac{1}{n}(1 + 3^k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן לכל $t > 0$ מתקיים $m(\{Tf > t\}) = 0$ ולכן $m(\{Tf \neq 0\}) = 0$ □

הערה 12 אם יש מידה $\varphi \ll m$ אז ממשפט רדון ניקודים יש פונקציה $f \in L^1$ כך ש $d\varphi = f dm$. מהמשפט נובע שכמעט בכל מקום מתקיים:

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(x,r)} f dm}{m(B(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\varphi(B(x,r))}{m(B(x,r))} = D\varphi(x)$$

כלומר

$$D\varphi(x) = f(x)$$

כמעט לכל x.

הגדרה 46 (**התכווצות יפה**) במרחב טופולוגי X נאמר שסדרת קבוצות בורל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ מתכווצת יפה לנקודה x אם יש סדרה יורדת של כדורים $B(x, r_i)$ כך ש $E_i \subseteq B(x, r_i)$ אבל בכל זאת יש קבוע $\alpha > 0$ כך שלכל i:

$$m(E_i) \geq \alpha m(B(x, r_i))$$

נשים לב שאין שום צורך שהקבוצות יכילו את הנקודה x שאליה הן מתכווצות יפה.

טענה 9 אם $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ ו x נקודת לבג של f ויש סדרת קבוצות E_i המתכווצת יפה ל x אז מתקיים:

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} f dm$$

הוכחה - ניקח כדורים פתוחים ו α המובטחים מהתכווצות יפה ואז:

$$\frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} f dm \le \frac{1}{\alpha m(B(x,r_i))} \int_{B(x,r_i)} f dm \longrightarrow 0$$

□

משפט 34 (המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי) אם $f \in L^1(\mathbb{R})$ ונגדיר $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$ אז בכל נקודת לבג של f - כלומר כמעט בכל מקום - F גזירה ונגזרת $F' = f$

הוכחה - נראה גזירות חד צדדית מימין; ניקח סדרת נקודות $x \to \delta_i$ מימין ואז:

$$\lim_i \frac{1}{\delta_i}(F(x+\delta_i) - F(x)) = \frac{1}{m([x, x+\delta_i])} \int_{[x,x+\delta_i]} f dm = f(x)$$

וזאת לפי הטענה הקודמת מכיוון שהקבוצות $[x, x+\delta_i]$ מתכווצות יפה ל x. בדיוק באותו אופן אפשר להראות גם גזירות משמאל, ולכן לפי טענה מאינפי הפונקציה גזירה.

הגדרה 47 (צפיפות מטרית) בהנתן קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ונקודה $x \in \mathbb{R}^k$ נגדיר את הצפיפות המטרית של E בנקודה x להיות:

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(E \cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

רק אם הגבול קיים.

משפט 35 (משפט הפירוק של Hahn) X מרחב מדיד ו μ מידה ממשית (כלומר סופית) על m אז יש פירוק של המרחב לשתי קבוצות מדידות זרות $A, B \in m$ כך ש $\mu^+(E) = \mu(E \cap A)$ ו $\mu^-(E) = \mu(E \cap B)$ לכל $E \in m$. כלומר:

$$d\mu^+ = \chi_A d\mu \quad d\mu^- = -\chi_B d\mu$$

הפירוק הזה נקרא פירוק $Hahn$ של X המושרה ע"י μ

הוכחה - לפי המשפט על הפירוק הפולארי: $d\mu = h d|\mu|$ כאשר $|h| = 1$. המידה μ היא ממשית ולכן גם h ממשית כלומר $h = \pm 1$. (כמעט בכל מקום ביחס ל $|\mu|$ ולכן ניתן להגדיר מחדש כך שתהיה ממשית בכל מקום). נסמן $A = h^{-1}(1)$ ו $B = h^{-1}(-1)$ נזכור ש $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ ושבהגדרות אלו: $\frac{1}{2}(1+h) = \chi_A$ אז:

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}(|\mu|(E) + \mu(E)) = \int_E \frac{1}{2}(1+h) d|\mu| = \int_E \chi_A d|\mu|$$

כאשר על A מתקיים ש $h = 1$ כלומר $d\mu = d|\mu|$ ולכן:

$$= \int_E \chi_A d\mu = \mu(E \cap A)$$

כעת עבור μ^- נשים לב ש $\mu = \mu^+ + \mu^-$ ושלכל E מתקיים מאדיטיביות - $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ ולכן $\mu(E \cap B) = \mu^-(E)$ □

מסקנה 10 לכל פירוק של מידה ממשית למידות חיוביות $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ מתקיים ש $\mu^+ \le \lambda_1$ ו $\mu^- \le \lambda_2$

הוכחה - כמובן ש $\mu \le \lambda_1$ ולכן :

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \le \lambda_1(E \cap A) \le \lambda_1(E)$$

ובדיוק באותו אופן עבור μ^-

משפט 36 (משפט ההצגה של ריס - הגרסה המרוכבת) אם X מרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי מקומית, ו Λ פונקציונל לינארי חסום על $C_c(X)$ אז יש מידת בורל מרוכבת רגולרית יחידה μ על X כך שלכל $f \in C_c(X)$ מתקיים $\Lambda f = \int f d\mu$

מרחבי מכפלה

הגדרה 48 (**מרחב המכפלה**) בהנתן מרחבים מדידים (X,m), (Y,n) נגדיר את σ-אלגברת המכפלה $m\times n$ להיות ה-σ-אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות הצילינדריות: $\{A\times B\ \ ;\ A\in m, B\in n\}$ $(X\times Y, m\times n)$ הוא מרחב המכפלה.

הגדרה 49 (**חתך של קבוצה**) בהנתן קבוצה $E\subseteq X\times Y$ נגדיר את החתכים שלה בכל נקודה $x\in X$ או $y\in Y$ להיות:

$$E_x=\{y\in Y\ ;\ (x,y)\in E\}\subseteq Y$$

$$E^y=\{x\in X\ ;\ (x,y)\in E\}\subseteq X$$

טענה 10 כל החתכים של קבוצה מדידה הם מדידים

טענה 11 אם $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ מדידה אז לכל $x\in X$ הפונקציה $f(x,y)$ מדידה על Y כפונקציה של y ולכל $y\in Y$ היא מדידה ב X כפונקציה של x

טענה 12 בהנתן זוג מרחבי מידה σ-סופיים - (X,m,μ),(Y,n,ν), ואם ניקח קבוצה מדידה $Q\in m\times n$ אז המידות של החתכים שלה הן פונקציות מדידות:

$$\varphi(x)=\nu(Q_x)\quad \psi(y)=\mu(Q_y)$$

מדידות, ובנוסף מתקיים:

$$\int_X\varphi(x)d\mu=\int_Y\varphi(y)d\nu$$

כלומר - נפח הקבוצה מוגדר היטב

הגדרה 50 (**מידת המכפלה**) בהנתן זוג מרחבי מידה σ-סופיים - (X,m,μ),(Y,n,ν), אז לכל קבוצה מדידה $Q\in m\times n$ נגדיר את מידת המכפלה שלה להיות:

$$(\mu\times\nu)(Q)=\int_X\nu(Q_x)d\mu=\int_Y\mu(Q_y)d\nu$$

הטענה אומרת שהמידה הנ"ל מוגדרת היטב וכן ניתן להראות שהיא אכן מידה ושהיא יוצאת σ-סופית.

משפט 37 (**משפט פוביני**) בהנתן זוג מרחבי מידה σ-סופיים - (X,m,μ),(Y,n,ν) ו f פונקציה מדידה על $X\times Y$ ביחס ל $m\times n$ אזי:

- במקרא ש $f:X\times Y\to[0,\infty]$ חיובית, אז $\int_X f(x,y)d\mu$ ו $\int_Y f(x,y)d\nu$ הן מדידות על Y ו X בהתאמה כפונקציות של x,y בהתאמה ויש שוויון:

$$\int_X(\int_Y f(x,y)d\nu)d\mu=\int_Y(\int_X f(x,y)d\mu)d\nu=\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu$$

- במקרה ש $f:X\times Y:\to\mathbb{C}$ מרוכבת, ובנוסף $\int_Y(\int_X|f|d\mu)d\nu<\infty$ אז $f\in L^1(X\times Y,\mu\times\nu))$
- ואם $f\in L^1(X\times Y,\mu\times\nu))$ מרוכבת אז כמעט לכל $x\in X$ (ביחס ל μ) מתקיים ש $f(x,y)$ היא ב $L^1(\nu)$ כפונקציה של y וכמעט לכל $y\in Y$ (ביחס ל ν) $f(x,y)\in L^1(\mu)$ כפונקציה של x. ובנוסף גם הפונקציות $\int_X f(x,y)d\mu\in L^1(\nu)$ (כפונקציה של y) ו $\int_Y f(x,y)d\nu\in L^1(\mu)$ (כפונקציה של x) ומתקיים השוויון:

$$\int_X(\int_Y f(x,y)d\nu)d\mu=\int_Y(\int_X f(x,y)d\mu)d\nu=\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu$$